Γραμμικότητα (προσθετικότητα) της μέσης τιμής

Γραμμικότητα: Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και X, Y ΤΜ τότε

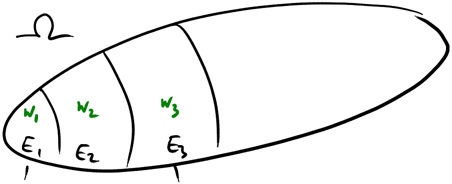
$$\mathbb{E}[\lambda X + \mu Y] = \lambda \mathbb{E}[X] + \mu \mathbb{E}[Y].$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι δύο μέσες τιμές $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$. Καμία άλλη υπόθεση.

Απίστευτα χρήσιμη ιδιότητα.

Η διαμέριση του Ω από μια ΤΜ X

$\mathbb{E}[X] = \sum_j v_j \cdot \mathbb{P}[X = v_j]$ όπου v_j είναι όλες οι τιμές που παίρνει η X.



Εναλλακτικός τρόπος:
Αν $\Omega = \bigcup_k E_k$ διαμέριση, X σταθερή σε κάθε E_k με τιμή w_k τότε

$$\mathbb{E}[X] = \sum_k w_k \mathbb{P}[E_k].$$

, w_k δε χρειάζεται να είναι διαφ.

Γραμμικότητα της μέσης τιμής: απόδειξη

$A_k = \bigcup_{\ell} C_{k,\ell}$ (ξένη ένωση)

Υποθέτουμε οι X, Y παίρνουν ακέραιες τιμές.

Ενδεχόμενα $A_k = \{X = k\}$, $B_\ell = \{Y = \ell\}$, $C_{k,\ell} = A_k \cap B_\ell$. $= \{X=k, Y=\ell\}$

(X,Y) μια ΤΜ με τιμή ζεύγος

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\mathbb{P}[A_k] = \sum_k k \boxed{\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}[C_{k,\ell}]} = \sum_{k,\ell} k\, \mathbb{P}(C_{k,\ell})$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \ell\mathbb{P}[B_\ell] = \sum_\ell \ell \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}[C_{k,\ell}] = \sum_{k,\ell} \ell\, \mathbb{P}(C_{k,\ell})$$

Άρα

$$\lambda\mathbb{E}[X] + \mu\mathbb{E}[Y] = \sum_k \sum_\ell \boxed{(\lambda k + \mu\ell)} \mathbb{P}[C_{k,\ell}] = \mathbb{E}[\lambda X + \mu Y]$$ ✓

$\varphi(X,Y) = \lambda X + \mu Y$ $\quad \mathbb{E}[\varphi(X,Y)] = \sum_{(k,\ell)} \varphi(k,\ell) \cdot \mathbb{P}(\underbrace{(X,Y)=(k,\ell)}_{C_{k,\ell}})$

Γραμμικότητα της μέσης τιμής: εφαρμογή

Ρίχνουμε δύο ζάρια, με αποτελέσματα X και Y.

Ποια η μέση τιμή $\mathbb{E}[X+Y]$;

Πριν: Βρίσκουμε την πυκνότητα της $Z = X + Y$, εφαρμόζουμε τον ορισμό.

Μετά: $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 3.5 + 3.5 = 7$

Δοκιμάστε να το βρείτε με την πρώτη μέθοδο!

Η μέση τιμή της διωνυμικής $B(N,p)$

$\mathbb{E}X_1 = 1\,\mathbb{P}(X_1=1) + \cancel{0\,\mathbb{P}(X_1=0)} = p$

Ρίχνουμε N νομίσματα με πιθανότητα κορώνας p.

$X =$ πόσες κορώνες φέραμε.
Ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\mathbb{P}[X=k] = \binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}$. $\quad 0 \leq k \leq N$

Πόσες κορώνες φέρνουμε κατά μέσο όρο;

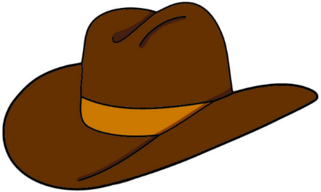
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{N} k \cdot \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \cdots (\text{πράξεις, κόλπα}) = Np$$

δείκτρια τη

Αλλιώς: $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, όπου $X_j =$: (φέρνουμε κορώνα στη j-ρίψη).

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_N] = p + \cdots + p = Np \quad //$$

N καπέλα στον αέρα



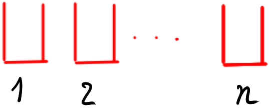
N άτομα πετάνε τα καπέλα τους στον αέρα και τα ξαναφοράνε.
Κατά μέσο όρο πόσα άτομα θα ξαναφορέσουν το καπέλο τους;

$X =$ πόσα άτομα ξαναφοράνε το καπέλο τους $= X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ με

$$X_j = \,:\,(\text{το } j\text{-άτομο ξαναφοράει το καπέλο του})\,.$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_N] = N\,\mathbb{E}X_1 = N \cdot \frac{1}{N} = 1$$

m μπάλες σε n κουτιά



Πετάμε m μπάλες σε n κουτιά.

Κατά μέσο όρο πόσα κουτιά θα μείνουν άδεια;

X = πόσα κουτιά μένουν άδεια = $X_1 + X_2 + \cdots X_n$, με

$$X_j = : (\text{το } j\text{-κουτί μένει άδειο}) .$$

$$\mathbb{E}X = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = n\boxed{\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{\sim e^{-1}}}^{\frac{m}{n}}$$

και

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n\mathbb{E}[X_1] \text{ (από συμμετρία)} .$$

Πρέπει να βρούμε το $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{P}[X_1 = 1] = \mathbb{P}[\text{Το 1-κουτί μένει άδειο}]$. $= \left(1-\frac{1}{n}\right)^m$

$\mathbb{P}$(μία ρίψη αποφεύγει το 1) $= \left(1-\frac{1}{n}\right)$

$$\sim n \cdot e^{-m/n}$$

$$\underline{\underline{m=n}}$$

$$\sim e^{-1} n$$

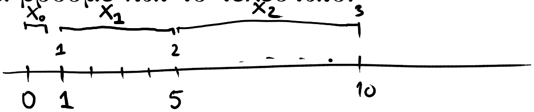
Το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών

Αγοράζουμε φακελάκια με μια φιγούρα μέσα το καθένα.
Υπάρχουν n διαφορετικές φιγούρες, εξ ίσου πιθανές.

Πόσα φακελάκια θα χρειαστεί να πάρουμε κατά μέσο όρο μέχρι να τις βρούμε όλες;

X = πόσες φορές αγοράσαμε μέχρι να βρούμε και το τελευταίο.

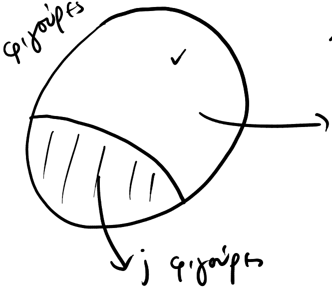
$$X = \overset{1}{X_0} + X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} \text{ με}$$



X_j = πόσες φορές αγοράσαμε έχοντας βρει ακριβώς j διαφορετικές φιγούρες.

Το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών

$$\mathbb{E}\left[X_j\right] = \frac{n}{n-j}$$



$$\frac{n-j}{n}$$

$$X_j \sim \text{Γεωμ}\left(\overbrace{\frac{n-j}{n}}^{p}\right) \qquad \mathbb{E}X_j = \frac{n}{n-j}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \mathbb{E}X_0 + \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_{n-1} \\
&= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1} = \\
&= n\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)}_{H_n} \simeq n \log n
\end{aligned}$$

H_n = n-οστός αρμονικός αριθμός

$$|H_n - \log n| \leq 1$$

$$N = e^5$$

Το πρόβλημα των ρεκόρ

Η βροχόπτωση μιας χρονιάς είναι μια ΤΜ: δεν αλλάζει από χρονιά σε χρονιά, ανεξάρτητες για διαφορετικές χρονιές.

$R_1, R_2, \ldots$ είναι οι βροχοπτώσεις σε διαδοχικές χρονιές.

Σε n διαδοχικές χρονιές πόσες από αυτές, κατά μέσο όρο, είναι χρονιές **ρεκόρ;**

Ρεκόρ σημαίνει η βροχόπτωση μιας χρονιάς ξεπερνά τις προηγούμενες.

R_j συνεχής ΤΜ:

άρα $\mathbb{P}\left[R_j = r\right] = 0$ για κάθε αριθμό r και $\mathbb{P}\left[R_i = R_j\right] = 0$ (για $i \neq j$).

Πάλι $X =$ πόσες χρονιές ρεκόρ έχουμε $= X_1 + \cdots + X_n$, με

$$X_j = \mathbb{1}\left(\eta\ j\text{-χρονιά είναι χρονιά ρεκόρ}\right).$$

Το πρόβλημα των ρεκόρ

$\mathbb{E} X_j = \mathbb{P}(X_j = 1)$

Βασική παρατήρηση: $\mathbb{P}[X_1 = 1] = 1$, $\mathbb{P}[X_2 = 1] = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}[X_3 = 1] = \frac{1}{3}$, κλπ.

Γιατί; Οι χρονιές 1, 2, έως k όλες έχουν την ίδια πιθανότητα να είναι οι καλύτερες από τις 1, 2, έως k.

$$\longrightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \log n$$

R_1, R_2 $\qquad \{R_2 > R_1\} \longrightarrow$ ρεκόρ για $j=2$

$\{R_1 > R_2\}$

R_1, R_2, R_3

Ενδεχόμενα που εξαρτώνται μόνο από μια ΤΜ

Πότε το ενδεχόμενο A εξαρτάται μόνο από την ΤΜ X;

Αν αρκεί να γνωρίζουμε την τιμή της X για να αποφασίσουμε αν ισχύει το A.

Με άλλα λόγια αν $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in V\}$, για κάποιο σύνολο V τιμών της X.

A

Ανεξάρτητες ΤΜ

Πότε ονομάζουμε τις ΤΜ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες;

$X_1 \quad X_2 \quad\quad X_n$

Ας είναι $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ενδεχόμενα. A_j εξαρτάται μόνο από X_j.

Οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ λέγονται ανεξάρτητες αν

κάθε τέτοια επιλογή από A_j είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Ομοίως για μια άπειρη οικογένεια από ΤΜ, αν κάθε πεπερασμένη συλλογή από αυτές είναι ανεξάρτητη.

Ανεξάρτητες ΤΜ: παράδειγμα

$A, B, C \subseteq \{1, \ldots, 6\}$

Πείραμα: Ρίχνουμε 3 ζάρια (τρία ανεξάρτητα πειράματα).

(X_1 καθορίζει A_1) $\Rightarrow$ A_1 είναι της μορφής

Αποτελέσματα: X_1, X_2, X_3.

$A_1 = (A, *, *)$

$A_2 = (*, B, *)$

$A_3 = (*, *, C)$

Οι ΤΜ X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες.

Ορίζουμε $Z = X_1 + X_2$. Οι Z, X_3 είναι επίσης ανεξάρτητες.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}((A, B, C)) = \frac{|A|}{6} \cdot \frac{|B|}{6} \cdot \frac{|C|}{6} = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(A_3)$$

Οι Z, X_1 δεν είναι ανεξάρτητες.

$\{Z = 12\} \cap \{X_1 = 5\} = \emptyset$

Ανεξάρτητες ΤΜ: κοινή κατανομή

Αν $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τότε

$$\mathbb{P}[\overbrace{X_1 = v_1}^{A_1},\ \overbrace{X_2 = v_2}^{A_2}, \dots,\ \overbrace{X_n = v_n}^{A_n}] = \mathbb{P}[\overbrace{X_1 = v_1}^{A_1}] \cdots \mathbb{P}[\overbrace{X_n = v_n}^{A_n}] = f_{X_1}(v_1) \cdots f_{X_n}(v_n).$$

Γενικότερα αν $V_1, \dots, V_n$ είναι σύνολα τιμών τότε

$$\mathbb{P}[X_1 \in V_1, \dots, X_n \in V_n] = \mathbb{P}[X_1 \in V_1] \cdots \mathbb{P}[X_n \in V_n].$$

Ανεξάρτητες ΤΜ: μέση τιμή γινομένου

$\varphi(X,Y) = X \cdot Y$

$X_1, \dots X_n$ ανεξ $\quad \mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \mathbb{E}X_1 \cdots \mathbb{E}X_n$.

$\boxed{\mathbb{E}(XY)} = \mathbb{E}\,\varphi(X,Y) = \sum_{(v_i,w_j)} v_i w_j \, \mathbb{P}\big((X,Y)=(v_i,w_j)\big)$

Αν X, Y ανεξάρτητες τότε $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
(αλλά **πάντα** $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$).

Αν $v_1, \dots, v_m$ οι δυνατές τιμές της X και $w_1, \dots, w_n$ οι δυνατές τιμές της Y
$\Longrightarrow$ είναι $v_i w_j$ οι δυνατές τιμές της $X \cdot Y$.

Έχουμε $\mathbb{E}[X] = \sum_i v_i \mathbb{P}[X = v_i]$ και $\mathbb{E}[Y] = \sum_j w_j \mathbb{P}[Y = w_j]$.

Πολλαπλασιάζουμε $\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = \sum_i v_i \, \mathbb{P}(X=v_i) \cdot \sum_j w_j \, \mathbb{P}(Y=w_j) =$

$$= \sum_{i,j} v_i w_j \, \mathbb{P}(X=v_i) \, \mathbb{P}(Y=w_j) = \sum_{i,j} v_i w_j \, \mathbb{P}(X=v_i, Y=w_j)$$