Μέση τιμή για διακριτές ΤΜ

Πόσο είναι η X «κατά μέσο όρο»;

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} = \text{μέσος όρος}$$

Ερμηνεία: αν πάρουμε πολλά δείγματα της X ποιος ο μέσος όρος τους;

$v_1, \dots, v_k$ = οι τιμές της X

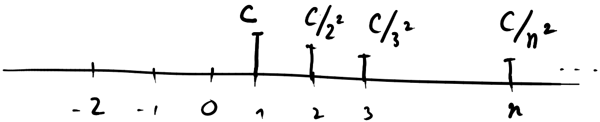
Πόσες από τις N φορές θα ισχύει $X = v_j$ .... περίπου $\mathbb{P}(X = v_j) \cdot N$

$$\frac{X_1 + \dots + X_N}{N} = v_1 \cdot \mathbb{P}(X = v_1) \cdot \cancel{N} + \dots + v_k \cdot \mathbb{P}(X = v_k) \cdot \cancel{N}$$

$$= v_1 \, \mathbb{P}(X = v_1) + \dots + v_k \, \mathbb{P}(X = v_k)$$

Μέση τιμή για διακριτές ΤΜ

Υπάρχουν ακέραιες ΤΜ χωρίς $\mathbb{E}X$.



$$\mathbb{E}[X] = \sum_j v_j \mathbb{P}[X = v_j]$$

Αν X παίρνει ακέραιες τιμές

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k \cdot f_X(k).$$

$\mathbb{P}(X=k)$

Απαραίτητη η σύγκλιση της σειράς.

$$c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1$$

συγκλίνουσα

$$c = \frac{1}{\sum_{1}^{\infty} 1/n^2}$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{c}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n} = +\infty$$

Μέση τιμή: X ομοιόμορφη

X ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $\{\overset{1/N}{1}, 2, \ldots, \overset{1/N}{N}\}$.

Ποια η μέση τιμή της;

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{N} \overbrace{(1+2+\cdots+N)}^{N(N+1)/2} = \frac{N+1}{2}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (N-2) & + & (N-1) & + & N \\ N & + & (N-1) & + & (N-2) & & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline N+1 & + & N+1 & + & N+1 & & & & & & & & N+1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{σύνολο}} \frac{N(N+1)}{2}$$

Μέση τιμή: X γεωμετρική με παράμετρο p

Ρίχνουμε νόμισμα με πιθανότητα κορώνας p έως την πρώτη κορώνα.

$X =$ χρόνος πρώτης κορώνας.

$f_X(k) = \mathbb{P}[X = k] = p(1-p)^{k-1}$, για $k \geq 1$.

Ποια η μέση τιμή $\mathbb{E}[X]$; (Κατά μέσο όρο πότε εμφανίζεται η πρώτη κορώνα;)

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot \underbrace{(1-p)}_{x}{}^{k-1} = p \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = p \sum_{k=0}^{\infty} (x^k)' = p\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = p\left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$k x^{k-1} = (x^k)'$$

$$= p \frac{1}{(1-x)^2} = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Μέση τιμή για συνεχή X με πυκνότητα

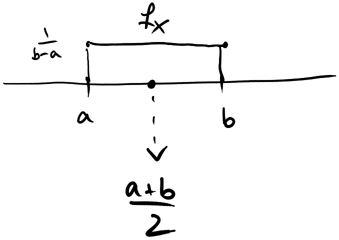
Αν X έχει πυκνότητα $f_X(x)$, δηλ. $\mathbb{P}\left[a \le X \le b\right] = \int_a^b f_X(x)\,dx$.

Η μέση τιμή είναι

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

αν υπάρχει το ολοκλήρωμα.

Μέση τιμή για συνεχή ομοιόμορφη κατανομή σε διάστημα



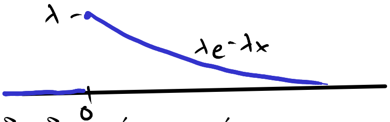
Αν X ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[a, b]$.

Πυκνότητα $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$.

$$\underline{\mathbb{E}[X]} = \int_a^b x \underbrace{f_X(x)}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{2(b-a)}\left(b^2 - a^2\right) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

Εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda > 0$



Έστω $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ δηλ. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot : (x \geq 0)$.

Χρησιμοποιείται πολύ για το χρόνο ανάμεσα σε διαδοχικά γεγονότα.

$$\mathbb{1}(\text{συνθήκη}) = \begin{cases} 1 & \text{αν ισχύει} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \lambda x \left(\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \right)' dx$$

κατά μέρη

$$= \cancel{\lambda x \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^\infty} + \int_0^\infty e^{-\overbrace{\lambda x}^{y}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-y}\, dy \qquad 1/\lambda$$

$$= \frac{1}{\lambda}.$$

Η μέση τιμή της $Y = \phi(X)$

Για την $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\phi(X)]$ δε χρειάζεται να βρούμε την πυκνότητα της Y

$$f_Y(k) = \mathbb{P}[\phi(X) = k].$$

Έχουμε

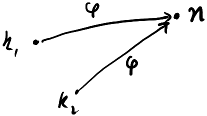
$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_k \phi(k) f_X(k) = \sum_k \phi(k)\mathbb{P}[X = k] \quad \text{(διακριτή περίπτωση)}$$

και

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) f_X(t)\, dt \quad \text{(συνεχής περίπτωση).}$$

Η μέση τιμή της $Y = \phi(X)$: απόδειξη

$Y = n$



$X = k_1$ ή $X = k_2$ ή ...

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\phi(X)\right] &= \sum_n n \cdot \mathbb{P}\left[\phi(X) = n\right] \\
&= \sum_n n \cdot \sum_{k \text{ τ.ώ. } \phi(k) = n} \mathbb{P}\left[X = k\right] \\
&= \sum_k \phi(k) \cdot \mathbb{P}\left[X = k\right].
\end{aligned}
$$

Η μέση τιμή της $Y = \phi(X)$: η περίπτωση $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $Y = X^2$

$x, y \geq 0$

Βρίσκουμε τη συνάρτηση πυκνότητας της Y:

$x = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = x^2$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}[Y \leq t] = \mathbb{P}\left[X \leq \sqrt{t}\right] = \int_0^{\sqrt{t}} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^t \underbrace{\frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}}_{f_Y(y)}\, dy.$$

$\mathbb{E}\,\varphi(X)$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty y \cdot \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} e^{-\lambda\sqrt{y}}\, dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda x}{2} e^{-\lambda x} 2x\, dx \quad (\text{αλλαγή μεταβλητής } x = \sqrt{y})$$

$$= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^\infty \phi(x) f_X(x)\, dx.$$