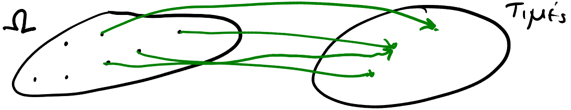
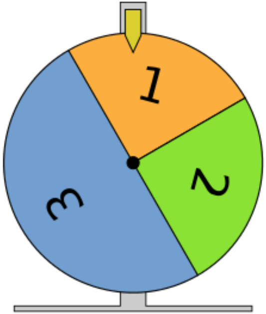
Τυχαίες Μεταβλητές (ΤΜ)





Μια ποσότητα που η τιμή της εξαρτάται από την έκβαση του πειράματος.

ΤΜ είναι μια συνάρτηση

Ω → ακεραίους, πραγματικούς αριθμούς, διανύσματα, αντικείμενα ...

$X : \Omega \to \mathbb{Z}$

$Y : \Omega \to \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \leftarrow X \\ \Omega = \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6\} & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \leftarrow Y \end{array}$$

Στο ίδιο πείραμα μπορεί να μελετάμε πολλές ΤΜ.

- ✓ Ένα ζάρι: X = αποτέλεσμα, $Y = X^2$
- ✓ Δύο ζάρια: X_1, X_2 τα δύο αποτελ., $Y = X_1 + X_2$
- Ένας τυχαίος άνθρωπος:

H = ύψος, W = βάρος

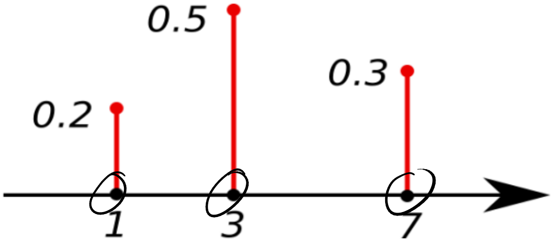
$\Omega = \{(a,b) : a,b = 1..6\}$

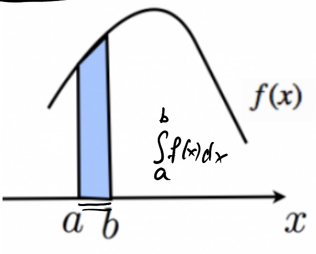
$X_1(a,b) = a$

$X_2(a,b) = b$

$Y(a,b) = a+b$

Τυχαίες Μεταβλητές: Διακριτές και συνεχείς





→ **Διακριτές ΤΜ:** Παίρνουν πεπερασμένες στο πλήθος ή αριθμήσιμες τιμές.

→ **Συνεχείς ΤΜ:** Οι τιμές τους έχουν συνεχές εύρος (π.χ. καλύπτουν ένα διάστημα). Οι περισσότερες τιμές έχουν πιθανότητα 0.

Υπάρχουν και ενδιάμεσες καταστάσεις ...

Τυχαίες Μεταβλητές: παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα νόμισμα 10 φορές.

X = πόσες κορώνες φέραμε.

$\Omega =$ όλες οι δεκάδες από Κ ή Γ $= \{К, \Gamma\}^{10} = \underbrace{\{К,\Gamma\} \times \cdots \times \{К,\Gamma\}}_{10}$, 2^{10} στοιχεία

Τιμές της X: $0, 1, \ldots, 10$

$$X(\underbrace{\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_{10}}_{\omega_j = К \text{ ή } \Gamma}) = \text{πόσες φορές υπάρχει το Κ στα } \omega_1 \cdots \omega_{10}$$

Τυχαίες Μεταβλητές: παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα νόμισμα <u>άπειρες φορές.</u>

$X =$ ποια η πρώτη φορά που φέραμε κορώνα

$Y =$ ποια η δεύτερη φορά που φέραμε κορώνα

$\Omega = \{ \omega = (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots) : \omega_j \text{ είναι } K \text{ ή } \Gamma \}$

Τιμές των X, Y:

$$X(\underline{\underline{\omega_1}} \omega_2 \omega_3 \dots) = \min \overbrace{\{ j : \quad \omega_j = K \}}^{\text{μπορεί να είναι κενό}}$$

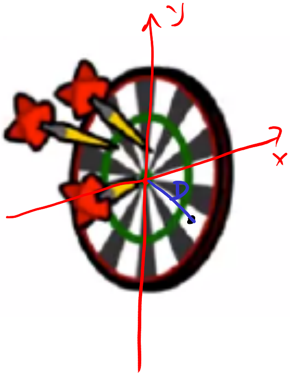
τιμές $1, 2, 3, \dots, \infty$

τιμές του $Y = 2, 3, \dots, \infty$

Πάντα ισχύει

$$X \leq Y$$

Τυχαίες Μεταβλητές: παράδειγμα



Ρίχνουμε βελάκι προς το στόχο.

$(\bar{X}, \bar{Y})$ = σε ποιο σημείο έπεσε.

D = η απόσταση του σημείου από το κέντρο του στόχου.

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Συνεχείς ΤΜ.

τιμές του D : $[0, 5]$

Τυχαίες Μεταβλητές: πυκνότητα πιθανότητας της X

Με ποια πιθανότητα παίρνει η *διακριτή* ΤΜ X την κάθε τιμή της;

τιμές της X

$0 \le f_X(k) = \mathbb{P}[X = k] \le 1$ (συνάρτηση πυκνότητας της X)

$$\underbrace{v_1, v_2, v_3, \dots}_{\text{τιμές}}$$

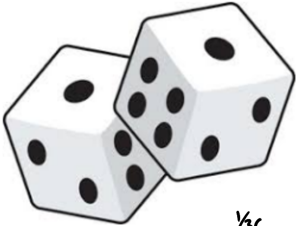
$$\sum_j \mathbb{P}(X = v_j)$$

$$\{X = v_1\} \cup \{X = v_2\} \cup \dots = \Omega$$

Πάντα ισχύει $\sum_k f_X(k) = 1$.

Η πυκνότητα ορίζεται διαφορετικά για συνεχείς ΤΜ.

Πυκνότητα μιας ΤΜ: παράδειγμα



Ρίχνουμε δύο ζάρια: X_1, X_2 τα δύο αποτελέσματα.

Ορίζουμε $Y = X_1 - X_2$. Ποια η πυκνότητα της Y;

$1 - 6 = -5$

$$\overset{1/36}{-5},\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \overset{1/36}{5} \longleftarrow \text{τιμές της } X$$

$$\mathbb{P}(Y=-5) = \mathbb{P}(X_1 - X_2 = -5) = \mathbb{P}(X_2 = X_1+5) = \sum_{j=1}^{6} \mathbb{P}(X_2 = X_1+5 \mid X_1 = j)\,\overbrace{\mathbb{P}(X_1=j)}^{1/6}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} \mathbb{P}(X_2 = j+5 \mid \cancel{X_1=j}) = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} \boxed{\mathbb{P}(X_2=j+5)} = \frac{1}{6}\, \mathbb{P}(X_2=1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Πυκνότητα μιας ΤΜ: παράδειγμα

υποσύνολο του $\{1, 2, \dots, 10\}$

1 2 3 10

x_1 x_k

Ρίχνουμε νόμισμα 10 φορές. Πιθανότητα κορώνας $p = \frac{1}{4}$.

X = πόσες κορώνες φέραμε. Ποια η πυκνότητα της X;

$$0 \leq X \leq 10$$

$$0 \leq k \leq 10$$

$$f_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$$

$$\{X = k\} = \bigcup_{\substack{B \subseteq \{1 \dots 10\} \\ |B| = k}} \left\{ \begin{array}{l} \text{κορώνες στις θέσεις } B \\ \text{γράμματα στις υπόλοιπες} \end{array} \right\}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_B \underbrace{p \cdots p}_{k} \underbrace{(1-p) \cdots (1-p)}_{10-k} = \sum_B p^k (1-p)^{10-k} = \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}$$

$B \to$ πόσα

B μεγ. k

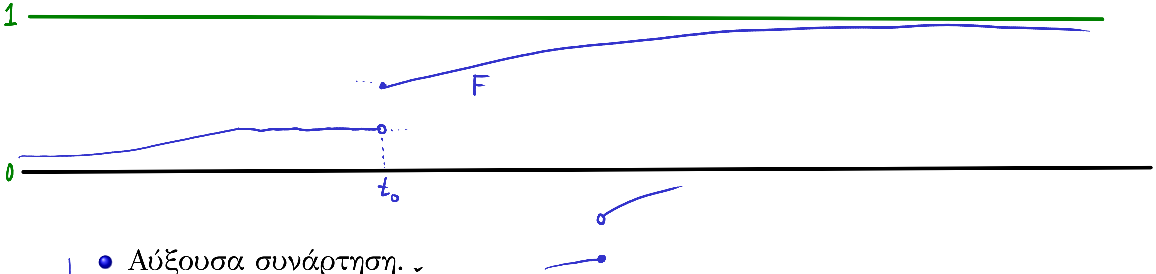
Συνάρτηση κατανομής μιας ΤΜ

$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$

Είναι η συνάρτηση $F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t]$.

$\leq$ και όχι με $<$

Έχει νόημα ακόμη κι αν η X δεν παίρνει διακριτές τιμές.

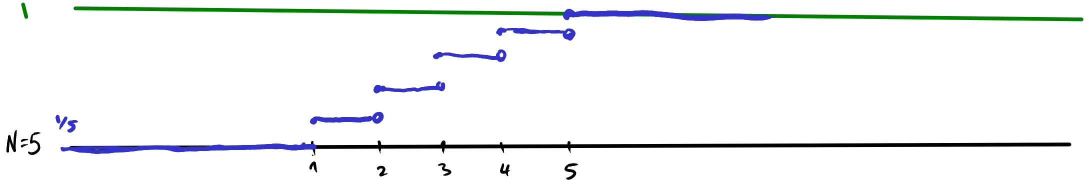


- Αύξουσα συνάρτηση.
- Για $t \to -\infty$ έχουμε $F_X(t) \to 0$.
- Για $t \to +\infty$ έχουμε $F_X(t) \to 1$.
- Σε κάθε σημείο $t \in \mathbb{R}$ η F_X είναι συνεχής από τα δεξιά.

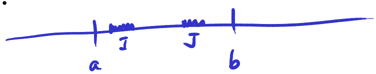
Συνάρτηση κατανομής: Ομοιόμορφη κατανομή

Διακριτή: η X παίρνει τις τιμές $\boxed{1, 2, \ldots, N}$ με πιθ. $\boxed{1/N}$ κάθε μία.

$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$

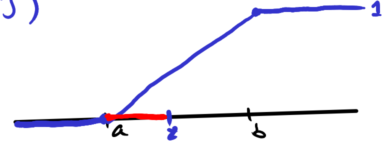


Συνεχής: όλες τιμές σε ένα διάστημα. Ίσα υποδιαστήματα, ίση πιθανότητα να πέσει μέσα η X.



$a \leq X \leq b$

$|I| = |J| \Longrightarrow \mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in J)$



Παράδειγμα: Γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα p

ΓΕΩΜ(p)

Εκτελούμε διαδοχικά ένα πείραμα που έχει πιθανότητα επιτυχίας p.

$X =$ η πρώτη φορά που σημειώνεται επιτυχία.

$k = 1, 2, \ldots$

$X = 1, 2, 3, \ldots$ $+\infty$

→ Ποια η πυκνότητα της X;

$$f_X(k) = \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\underline{1^{\eta} \text{ αποτ.}}, \underline{2^{\eta} \text{ αποτ.}}, \ldots, \underline{k\text{-}1 \text{ αποτ.}}, \underline{k \text{ επιτ.}})$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(1^{\eta} \text{ αποτ})}_{1-p} \underbrace{\mathbb{P}(2^{\eta} \text{ αποτ.})}_{1-p} \cdots \mathbb{P}(k\text{-}1 \text{ αποτ.}) \underbrace{\mathbb{P}(k \text{ επιτ.})}_{p}$$

$$= (1-p)^{k-1} p \qquad (k \geq 1)$$

→ Ποια η συνάρτηση κατανομής;

$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ αρκεί $t \in \mathbb{N}$

$$= \sum_{k \leq t} \underbrace{\mathbb{P}(X=k)}_{f_X(k)} = \sum_{k \leq t} p(1-p)^{k-1}$$

$$\sum_{\ell=0}^{t-1} a^{\ell} = \frac{1-a^t}{1-a}$$

πεπ. γεωμετρική σειρά

$$= \sum_{k=1}^{t} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{\ell=0}^{t-1} (1-p)^{\ell} = p \, \frac{1-(1-p)^t}{p} = \boxed{1-(1-p)^t.}$$

$t \to \infty$ $(1-p)^t \to 0$

Παράδειγμα: Διωνυμική κατανομή $B(N, p)$

Εκτελούμε διαδοχικά N φορές ένα πείραμα που έχει πιθανότητα επιτυχίας p.

$B \subseteq \{1, \ldots, N\}$, όπου έχουμε επιτυχία.

$X =$ πόσες επιτυχίες είχαμε

Ποια η πυκνότητα της X;

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{\substack{B \subseteq \{1..N\} \\ |B|=k}} \mathbb{P}(\text{έχουμε επιτ. ακριβώς στις θέσεις } B)$$

$0 \leq k \leq N$

$p^k (1-p)^{N-k}$

Πόσα; $\binom{N}{k}$

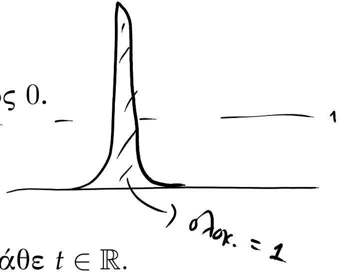
$$f_X(k) = \mathbb{P}(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Ποια η συνάρτηση κατανομής;

$$F_X(k) = \sum_{l=0}^{k} f_X(l) = \sum_{l=0}^{k} \binom{N}{l} p^l (1-p)^{N-l}$$

Πυκνότητα για συνεχείς ΤΜ

Για συνεχείς ΤΜ η πιθανότητα $\mathbb{P}[X = a]$ είναι συνήθως 0.



Λέμε X έχει πυκνότητα $f(x)$ αν

$$F_X(t) = \mathbb{P}[X \le t] = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Απειροστικός Λογισμός $\Longrightarrow F'_X(t) = f(t)$ αν f συνεχής στο t.

Εκτός για $t = 0, 2$

Πάντα ισχύει $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$ $\qquad 0 \le f(x)$

Π.χ. η ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a, b]$.

$0 \quad 2$