Το διωνυμικό θεώρημα

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^n = \;;$$

Διωνυμικό θεώρημα

Το διωνυμικό θεώρημα

ομογενής $\binom{n}{0}$

$$\boxed{(x+y)^n = x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n-2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{1}xy^{n-1} + y^n}$$

$\binom{n}{n}$

Με το συμβολισμό του αθροίσματος:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \boxed{\binom{n}{k} x^k y^{n-k}}.$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Π.χ., για $n = 5$:

$$(x+y)^5 = x^{\cancel{4}5} + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

$k=0$ $k=1$ $k=2$ $k=3$ $k=4$ $k=5$

Το διωνυμικό θεώρημα: απόδειξη

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \qquad \binom{n}{n-k}$$

$a(b+c) = ab + ac$ ✓

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$(a+b)(c+d)(e+f) = ace + acf + ade + adf + bce \ldots$

$$\overbrace{(x+y)(x+y)(x+y)\cdots(x+y)(x+y)}^{n} =$$

$$\underset{x}{(x+y)}\;\underset{x}{(x+y)}\;\underset{y}{(x+y)}\cdots\underset{y}{(x+y)}\;\underset{x}{(x+y)}$$

= διάλεξε k φορές το x, $n-k$ φορές το y

$\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ πόσες φορές = με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω k φορές το x.

$\binom{n}{k}$

Το διωνυμικό θεώρημα: μερικές συνέπειες

Το διωνυμικό θεώρημα: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

✓ **Εφαρμογή 1:** $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

$x = y = 1$

$2^n = (1+1)^n = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} \cancel{1^k 1^{n-k}}$

$x = -1$

$y = 1$

Αρ. Μέλος $= 0$

Δεξ. $= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k \text{ άρτιο}} \binom{n}{k} - \sum_{k \text{ περιττό}} \binom{n}{k} = 0$

✓

Εφαρμογή 2: $\sum_{k \text{ περιττό}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ άρτιο}} \binom{n}{k}$

$0 \leq k \leq n$

Συνδυαστικές αποδείξεις ταυτοτήτων

Πόσα υποσύνολα μεγ. k έχει το $\{1 \ldots n\}$

$\{1 \ldots n\} \supseteq A$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$0 \leq k \leq n$

$0 \leq n-k \leq n$

$|A^c| = n-k$

$A^c = \{1 \ldots n\} \setminus A = \{x$ που δεν ανήκουν στο $A\}$

$(A^c)^c = A$

πλήθος είναι $\binom{n}{n-k}$

$A \to A^c$ είναι 1-1 άρα αρκεί να μετρήσουμε τα A^c.

Συνδυαστικές αποδείξεις ταυτοτήτων

όλα τα υποσύνολα του $\{1 \dots n\}$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

$\binom{n}{0} \to$ πόσα υποσύνολα μεγέθους 0

$\binom{n}{1} \to$. — — — — 1

$\binom{n}{2} \to$. — — - - 2

$\vdots$

$\binom{n}{n} \to$. — — - - . n

$\bigoplus$ όλα τα υποσύνολα

Συνδυαστικές αποδείξεις ταυτοτήτων: τρίγωνο του Pascal

$\binom{n}{k}$ → υποσύνολα μεγέθους k του $\{1..n\}$

$A \subseteq$, $|A| = k$

$k-1$

→ $\underbrace{\bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \cdots \ \bullet \ \bullet}_{}$ $\bullet$

1 2 3 4 ... $n-2$ $n-1$ n

n=0 — 1

n=1 — 1 1

n=2 — 1 2 1

n=3 — 1 3 3 1

n=4 — 1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

πάνω αριστερά

ο πάνω δεξιά

1η κατηγορία από A: αυτά που περιέχουν το n

2η κατηγορία: δεν περιέχει το n

$n \notin A \implies A \subseteq \{1, \dots, n-1\} \to \binom{n-1}{k}$ τέτοια A υπάρχουν

$n \in A$ καθορίζεται από το $|A \cap \{1 \dots n-1\}| = k-1$ $\binom{n-1}{k-1}$

Συνδυαστικές αποδείξεις ταυτοτήτων

μεγ. n

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}$$

$$\|$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} = |C_0| + |C_1| + \dots + |C_n|$$

↳ πόσα υποσύνολα μεγ. n έχει το 1, 2, …, 2n

$C_j = \{ A \subseteq \{1 \dots 2n\}$ που έχουν j άσπρα στοιχεία$\}$

↳ ξένα ανά δύο

$|C_j| = ?$

$A \in C_j$ → έχει j άσπρα, έχει n-j μαύρα

1. Παίρνω j άσπρα από n
2. Παίρνω n-j μαύρα από n

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad \dots \quad n}_{\text{άσπρα}} \quad \underbrace{n+1 \quad n+2 \quad \dots \quad 2n}_{\text{μαύρα}}$$

$$|C_j| = \binom{n}{j} \cdot \binom{n}{n-j}$$

$j = 0, 1, \dots, n$

Προβλήματα απαρίθμησης

Μια ομάδα 20 ατόμων θέλει να φτιάξει τρεις, ξένες μεταξύ τους, επιτροπές με

6, 5 και 4 άτομα η κάθε μία.

Τα μέλη κάθε επιτροπής είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. (δεν έχει σημασία η σειρά)
Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

$$\binom{20}{6} \cdot \binom{14}{5} \cdot \binom{9}{4}$$

Προβλήματα απαρίθμησης

Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα άνδρα και μια γυναίκα, που να μην είναι παντρεμένοι μεταξύ τους, από n παντρεμένα ζευγάρια;

$\underbrace{n}_{A}$ $\underbrace{n-1}_{\Gamma}$ $n \cdot (n-1)$

Πόσα υποσύνολα του $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ περιέχουν ακριβώς k περιττούς αριθμούς;

A ⊆

$A = A_\pi \cup A_\alpha$

$\binom{n}{k} \cdot 2^n$

A_π είναι k από τα

$\underbrace{\{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}}_{n}$

Προβλήματα απαρίθμησης

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{12}\}$

Σε μια σχολή χορού μια τάξη αποτελείται από 12 άνδρες και 10 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν

$\binom{12}{5} \cdot \underline{10} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6}$

5 άνδρες και 5 γυναίκες

και να σχηματίσουν ζεύγη χορού;

Δε μας ενδιαφέρει η σειρά των ζευγών, μόνο το ποια ζεύγη σχηματίζονται.

–	$\underline{12}$	– $\underline{10}$
–	$\underline{11}$	– $\underline{9}$
–	$\underline{10}$	– $\underline{8}$
–	$\underline{9}$	– $\underline{7}$
–	$\underline{8}$	– $\underline{6}$
	A	Γ

γ τέμπεδον με

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!}$$

$$\binom{12}{5}$$

$5!$

Προβλήματα απαρίθμησης

Απο μια συνηθισμένη τράπουλα, με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 6 χαρτιά (δε μας ενδιαφέρει η σειρά τους) από τα οποία

1. τα τρία να είναι κόκκινα ($\heartsuit$ ή $\diamondsuit$) και τα τρία μαύρα ($\spadesuit$ ή $\clubsuit$),
2. και τα δύο από τα τρία κόκκινα να είναι του ίδιου είδους (αριθμού);

Μια τέτοια εξάδα είναι η $1\diamondsuit, 1\heartsuit, 2\heartsuit, 1\spadesuit, 2\spadesuit, 3\clubsuit$.

μόνο κόκκινο

$$12 \times 26 \times \binom{26}{3}$$