

Το διωνυμικό θεώρημα

$$\underline{(x + y)^2} = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^n = ; \text{ Διωνυμικό θεώρημα}$$

Το διωνυμικό θεώρημα

$$(x+y)^n = \underbrace{x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n-2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{1}xy^{n-1} + y^n}_{\binom{n}{n} \leftarrow}$$

→ σμολέντς $\binom{n}{0}$

Με το συμβολισμό του αθροίσματος:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Π.χ., για $n = 5$:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$\begin{array}{cccccc} \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\ k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 & k=5 \end{array}$$

Το διωνυμικό θεώρημα: απόδειξη

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \cdot \binom{n}{n-k}$$

\rightarrow $\underbrace{(x+y)(x+y)(x+y) \dots (x+y)(x+y)}_n =$
 $\underbrace{x}_x \underbrace{x}_x \underbrace{y}_y \dots \underbrace{y}_y \underbrace{x}_x =$

= διαλέγεις k φορές το x , $n-k$ φορές το y

$$\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

πόσες φορές = με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί k φορές το x .

$$\binom{n}{k}$$

$$a(b+c) = ab + ac \quad \checkmark$$

$$\underbrace{(a+b)(c+d)} = ac + ad + bc + bd$$

$$\underbrace{(a+b)(c+d)(e+f)} = ace + acf + ade + adf + bce + \dots$$

Το διωνυμικό θεώρημα: μερικές συνέπειες

Το διωνυμικό θεώρημα: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

✓ Εφαρμογή 1: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ $x=y=1$ $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$

Εφαρμογή 2: $\sum_{\substack{k \text{ περιττό} \\ 0 \leq k \leq n}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k \text{ άρτιο} \\ 0 \leq k \leq n}} \binom{n}{k}$

$x = -1$
 $y = 1$
Αρ. μέλος = $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$
 $\Delta\epsilon\zeta. = \sum_{k \text{ άρτιο}} \binom{n}{k} - \sum_{k \text{ περιττό}} \binom{n}{k} = 0$

Συνδυαστικές αποδείξεις ταυτοτήτων

→ Πόσα υποσύνολα μεγ. k έχει το $\{1, \dots, n\}$?

$$\{1, \dots, n\} \supseteq A$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$0 \leq k \leq n$$

$$0 \leq n-k \leq n$$

$$\rightarrow |A^c| = n-k$$

$$\rightarrow A^c = \{1, \dots, n\} \setminus A = \{x \text{ που δεν ανήκουν σε } A\}$$

$$(A^c)^c = A \rightarrow \text{η δύναμη είναι } \binom{n}{n-k}$$

$A \rightarrow A^c$ είναι 1-1 άρα αρκεί να περιγράψω τα A^c .

Συνδυαστικές αποδείξεις ταυτοτήτων

όλα τα υποσύνολα του $\{1, \dots, n\}$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$\binom{n}{0} \rightarrow$ όλα υποσύνολα μεγέθους 0

$\binom{n}{1} \rightarrow$ - - - - - 1

$\binom{n}{2} \rightarrow$ - - - - - 2

\vdots

$\binom{n}{n} \rightarrow$ - - - - - n

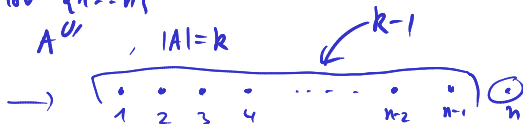
\oplus όλα τα υποσύνολα

Συνδυαστικές αποδείξεις ταυτοτήτων: τρίγωνο του Pascal

$$\binom{n}{k}$$

υποσύνολα μεγέθους k του $\{1, \dots, n\}$

$$A \subseteq \{1, \dots, n\}, |A| = k$$



$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
	1	6	15	20	15	6		
	1	7	21	35	21	7		
	1	8	28	56	70	56	28	8

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$7^{\text{η}}$ κατηγορία από A :
 από που περιέχουν το n
 $2^{\text{η}}$ κατηγορία:
 δεν περιέχουν το n

$n \notin A \Rightarrow A \subseteq \{1, \dots, n-1\} \rightarrow \binom{n-1}{k}$ τέτοια A υπάρχουν

$n \in A$ καθορίζονται από το $|A \cap \{1, \dots, n-1\}| = k-1$

$$\binom{n-1}{k-1}$$

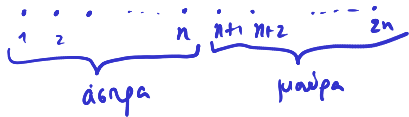
Συνδυαστικές αποδείξεις ταυτοτήτων

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

||

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} = |C_0| + |C_1| + \dots + |C_n|$$

↳ ποσα υποσύνολα μεγ. n έχει το $1, 2, \dots, 2n$



μεγ. n

$C_j = \{ A \subseteq \{1, \dots, 2n\} \text{ που έχουν } j \text{ άσπρα στοιχεία} \}$

↳ ζέρει ανά δύο

$|C_j| = ?$

$A \in C_j$

→ έχει j άσπρα

→ έχει n-j μαύρα

1. Παιρνω j άσπρα ^{από n}
2. Παιρνω n-j μαύρα ^{από n}

$$|C_j| = \binom{n}{j} \cdot \binom{n}{n-j}$$

$j = 0, 1, \dots, n$

Προβλήματα απαρίθμησης

Μια ομάδα 20 ατόμων θέλει να φτιάξει τρεις, ξένες μεταξύ τους, επιτροπές με

6, 5 και 4 άτομα η κάθε μία.

Τα μέλη κάθε επιτροπής είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. (δεν έχει σημασία η σειρά)

Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

$$\binom{20}{6} \cdot \binom{14}{5} \cdot \binom{9}{4}$$

Προβλήματα απαρίθμησης

Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα άνδρα και μια γυναίκα, που να μην είναι παντρεμένοι μεταξύ τους, από n παντρεμένα ζευγάρια;

$$\underbrace{n}_A \quad \underbrace{n-1}_r \quad n \cdot (n-1)$$

Πόσα υποσύνολα του $\{1, 2, \dots, 2n-1, 2n\}$ περιέχουν ακριβώς k περιττούς αριθμούς;

$$\underbrace{A}_{\subseteq} \quad A = \underbrace{A_\pi}_{\downarrow} \cup \underbrace{\overline{A}_\alpha}_{\downarrow}$$
$$\underbrace{\binom{n}{k} \cdot 2^n}$$

A_n είναι k από τα

$$\underbrace{\{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}}_n$$

Προβλήματα απαρίθμησης

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{12}\}$$

Σε μια σχολή χορού μια τάξη αποτελείται από 12 άνδρες και 10 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν

$$\binom{12}{5} \cdot \underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}_{5 \text{ άνδρες}} \text{ και } 5 \text{ γυναίκες}$$

και να σχηματίσουν ζεύγη χορού;

Δε μας ενδιαφέρει η σειρά των ζευγών, μόνο το ποια ζεύγη σχηματίζονται.

$$\begin{array}{l} - \quad \underbrace{12} - \underbrace{10} \\ - \quad \underbrace{11} - \underbrace{9} \\ - \quad \underbrace{10} - \underbrace{8} \\ - \quad \underbrace{9} - \underbrace{7} \\ - \quad \underbrace{8} - \underbrace{6} \end{array}$$

A Γ

σχηματίζονται με

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!}$$

$$\binom{12}{5}$$

5!

Προβλήματα απαρίθμησης

Απο μια συνηθισμένη τράπουλα, με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 6 χαρτιά (δε μας ενδιαφέρει η σειρά τους) από τα οποία

- 1 τα τρία να είναι κόκκινα (\heartsuit ή \diamondsuit) και τα τρία μαύρα (\spadesuit ή \clubsuit),
- 2 και τα δύο από τα τρία κόκκινα να είναι του ίδιου είδους (αριθμού);

Μια τέτοια εξάδα είναι η $1\diamondsuit, 1\heartsuit, 2\heartsuit, 1\spadesuit, 2\spadesuit, 3\clubsuit$.

