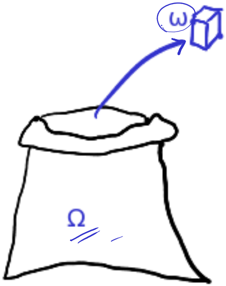
Απαρίθμηση και Πιθανότητες



Τυχαία επιλογή από ένα σύνολο Ω (ομοιόμορφη κατανομή συνήθως).

$p(\omega)$ όλα ίσα, ομοιόμορφη

Πιθανότητα όλων των αποτελεσμάτων $\omega \in \Omega$ **ίδια**.

$$\text{Άρα } p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{\text{πλήθος στοιχείων του } \Omega}.$$

Παράδειγμα: ποια η πιθανότητα ότι αν τραβήξουμε 6 φύλλα από μια τράπουλα θα έχουμε τουλάχιστον ένα άσο;

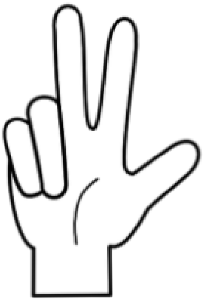
Ω = όλες οι εξάδες

E = εξάδα περιέχει άσο

$$\text{Απάντηση} = \frac{\text{πλήθος εξάδων με τουλάχιστον ένα άσο}}{\text{πλήθος όλων των εξάδων}}.$$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

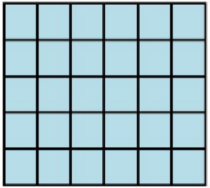
Απαρίθμηση και Πιθανότητες



Πρέπει να μάθουμε να μετράμε!

Απαρίθμηση: αρχή πολλαπλασιασμού

ανεξαρτήτων επιλογών.



5 x 6 = 30

5 γραμμές

6 στήλες

Η βασική αρχή:

μονοσήμαντα

Κάθε τετραγωνάκι καθορίζεται από

5 × 6

όνομα για το τετραγωνάκι → (αριθμός γραμμής, αριθμός στήλης)

Συνολικός αριθμός = (πλήθος γραμμών) × (πλήθος στηλών)

Απαρίθμηση: αρχή πολλαπλασιασμού

m ομάδες

$A = \{a_1, \dots, a_m\}$ $\quad (a_1, *) \quad (a_2, *) \quad (a_3, *) \quad \dots \quad (a_m, *)$

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$

οτιδήποτε

$n \quad n \quad \dots \quad n$

Πόσα ζευγάρια $\boxed{(a, b)}$ υπάρχουν με $a \in A, b \in B$, αν $|A| = m, |B| = n$;

$$m \cdot n$$

Πόσες τριάδες (a, b, c) υπάρχουν με $a \in A, b \in B, c \in C$
και $|A| = m, |B| = n, |C| = k$;

$$m \cdot n \cdot k$$

Απαρίθμηση: αρχή πολλαπλασιασμού

Αν στην κατασκευή ενός σύνθετου αντικειμένου επιλέγουμε τα

$$x_1 \text{ από το σύνολο } A_1, \ldots, x_k \text{ από το σύνολο } A_k$$

ανεξάρτητα η κάθε επιλογή από τις άλλες, τότε παίρνουμε

$$|A_1| \times \cdots \times |A_k|$$

διαφορετικά αντικείμενα.

Αρχή πολλαπλασιασμού: παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα ζάρι n φορές. Πόσα τα δυνατά αποτελέσματα;

$$\underbrace{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}^{6 \times 6 \times \cdots \times 6 = 6^n} \qquad X_j = \text{το αποτ. του } j \text{ ζαριού}, \quad X_j \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

Αν όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, ποια η πιθανότητα του καθενός;

$$n = 5$$

$$\mathbb{P}(1,3,1,3,6) = \frac{1}{6^5}$$

Αρχή πολλαπλασιασμού: παράδειγμα

$$\underbrace{2}_{2,3,4}\ \underbrace{3}_{2,3,4}\ \underbrace{4}_{2,3,4}\ \underbrace{2}_{2,3,4}\ \underbrace{3}_{2,3,4}$$

Πόσοι φυσικοί αριθμοί υπάρχουν με ακριβώς 5 ψηφία και με κάθε ψηφίο τους ένα από τα 2, 3 ή 4;

3 επιλογές

πλήθος επιλογών = 5

$$\underbrace{3\cdot\ldots\cdot 3}_{5} = 3^5$$

Αρχή πολλαπλασιασμού: το δυναμοσύνολο ενός συνόλου

όλα τα υποσύνολά του

$\{\},$ κενό

8

$\{a\}, \{b\}, \{c\},$

$\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\},$

$\{a,b,c\}$

Πόσα υποσύνολα έχει ένα σύνολο με n στοιχεία;

$\{b, c\}$

ΟΧΙ ΝΑΙ ΝΑΙ

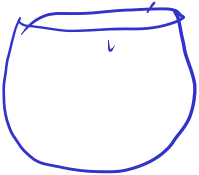
Εδώ βλέπουμε τα υποσύνολα του $\{a, b, c\}$.

$A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

Με πόσους τρόπους μπορεί να εξελιχθεί.

2 επιλογές για κάθε στοιχείο του A

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{n} = 2^n$$



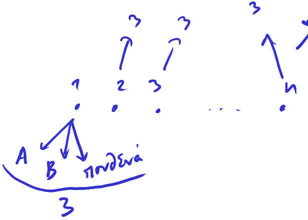
πορεία της κατασκευής $\longleftrightarrow$ αντικείμενο

Αρχή πολλαπλασιασμού: δύο ξένα υποσύνολα του $\{1, 2, \ldots, n\}$

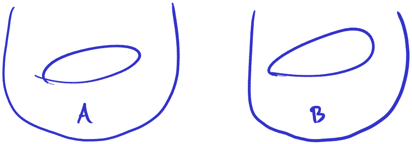
Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο **ξένα** υποσύνολα

$$A, B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, \quad A \cap B = \emptyset;$$

κενό



3^n



Αρχή πολλαπλασιασμού: πλήθος διαιρετών

Ο ακέραιος n μας δίνεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών: π.χ., $n = 120 = \boxed{2^3 \cdot 3 \cdot 5.}$

$2, 3, 5$

16 διαιρέτες έχει το 120

$1, \ldots, 120$

Ποιο το πλήθος των διαιρετών του ακεραίου n;

$p \mid k \mid n$ διαιρεί

$\cancel{2^4 \mid k \mid n}$

$k = 2^{\alpha} 3^{\beta} 5^{\gamma} \mid 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$0 \le \alpha \le 3$ 4 ×

$0 \le \beta \le 1$ 2 ×

$0 \le \gamma \le 1$ 2

Διαδ. κατασκ. του k

Διαλέγω α, β, γ ώστε

$n = p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$

p_j = πρώτοι, διαφορετικοί

$0 < \nu_j$

πλήθος διαιρ. $= (\nu_1 + 1) \times (\nu_2 + 1) \times \cdots \times (\nu_k + 1)$

Αρχή πολλαπλασιασμού: ημιανεξάρτητες επιλογές

Διαλέγουμε δύο τραπουλόχαρτα από μια τράπουλα, το 1ο και το 2ο (χωρίς επανάθεση).

(a, b)

52 51

Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

52×51

52 επιλογές για το 1ο. $1^{o} = 1$ ♡

51

Επιλογή του 1ου επηρεάζει τις επιλογές για το 2ο, αλλά **όχι τον αριθμό τους.**

Αρχή πολλαπλασιασμού ισχύει και πάλι.

Ημιανεξάρτητες επιλογές: μεταθέσεις n διαφορετικών αντικειμένων

1, 7, 5, 6, 2, 3, 4

$n = 7$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$;

$$p(n, n-1, n-2, \ldots, 1) = \frac{1}{n!}$$

$$\underbrace{n}_{1^\circ} \quad \underbrace{n-1}_{2^\circ} \quad \underbrace{n-2}_{3^\circ} \quad \cdots \quad \underbrace{2}_{n-1^\circ} \quad \underbrace{1}_{n^\circ} \longrightarrow n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

n παραγοντικό

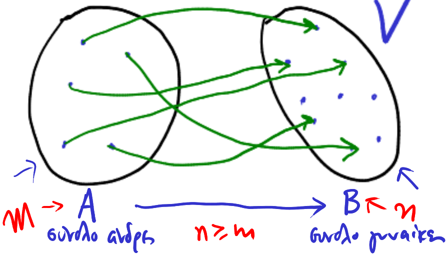
$$7! = \underbrace{7\cdot 6\cdot 5 \cdots 1}$$

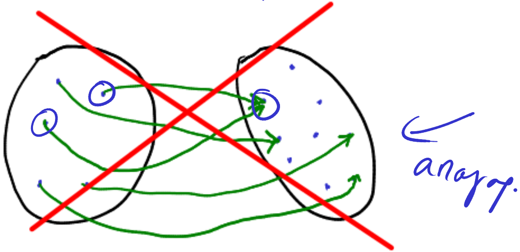
αυξάνονται πολύ γρήγορα.

Ημιανεξάρτητες επιλογές: 1-1 συναρτήσεις

$|B| \geq |A|$

$A \to B$





Πόσες 1-1 συναρτήσεις υπάρχουν από ένα σύνολο A σε σύνολο B;

$$\underset{1^{ος}}{n} \cdot \underset{2^{ος}}{(n-1)}\, \underset{3^{ος}}{(n-2)} \dots \underset{m^{ο}}{(n-m+1)}$$

Διατάξεις επαναλαμβανόμενων στοιχείων

Πόσες διαφορετικές διατάξεις υπάρχουν των ψηφίων 1, 1', 2, 3, 4;

5! μεταθέσεις → σε κάθε δύο αντιστοιχεί μία

1 2 1' 3 4

1' 2 1 3 4

ίδια

1, 1', 2, 3, 4

$$\frac{5!}{2}$$

Διατάξεις επαναλαμβανόμενων στοιχείων

Πόσες διαφορετικές διατάξεις υπάρχουν των ψηφίων $1, 1', 1'', 2, 2', 3, 4$;

$7!$

$\dfrac{7!}{12}$ Τελικό

$1\ 2\ 1'\ 1''\ 3\ 2\ 4$

μετάθεση με τόνους

$1,\ 1',\ 1$

3 επιλογές για
× τον άσο χωρίς τόνο

2 επιλογές για τον
άσο με ένα τόνο

$$\frac{2 \times 3 \times 2}{12}$$

Επιλογές k αντικειμένων από n με σειρά

Επιλέγουμε k από τα αντικείμενα $\{1, 2, \ldots, n\}$ και τα γράφουμε στη σειρά. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους γίνεται;

$n = 5$ 1, 2, 3, 4, 5

$k = 3$

1, 2, 3

3, 2, 1

4, 5, 1

1, 4, 5

$\vdots$

$$\underbrace{\overset{n}{\sqcup}}_{1^o} \quad \underbrace{\overset{n-1}{\sqcup}}_{2^o} \quad n-2 \quad \ldots \quad \underbrace{\overset{n-k+1}{\sqcup}}_{k^o}$$

$$\underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ παράγοντες}}$$

k αντικείμενα από n χωρίς σειρά. Διωνυμικοί συντελεστές.

Επιλέγουμε k από τα αντικείμενα $\{1, 2, \ldots, n\}$. Δε μας ενδιαφέρει η σειρά!
Με πόσους διαφορετικούς τρόπους γίνεται;

$n(n-1)\cdots(n-k+1)$ αν έχει σημασία η σειρά

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ μπαίνουν στη σειρά με $k!$ τρόπους

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Διωνυμικός Συντελεστής «n ανά k»:

συμμετρικό ως προς k, $n-k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Διωνυμικοί συντελεστές: απλές ιδιότητες

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$\binom{n}{k}$ = πόσα υποσύνολα μεγέθους k έχει το $\{1, 2, \ldots, n\}$

$0! = 1$

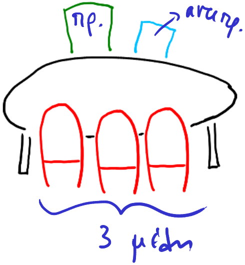
$$\binom{n}{k} = 0 \text{ αν } k > n.$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Παράδειγμα με διωνυμικούς συντελεστές



Από μια ομάδα 10 ατόμων επιλέγουμε προεδρείο με

Πρόεδρο, Αντιπρόεδρο και 3 μέλη

↳ δε μας ενδιαφέρει η σειρά

Μέ πόσους τρόπους;

Επιλογή προέδρου: 10

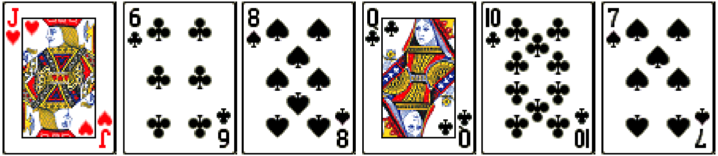
—||— αντιπροέδρου: 9

3 μέλη: $\binom{8}{3}$

$$10 \cdot 9 \cdot \binom{8}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{1 \cdot \cancel{2 \cdot 3}}$$

$$= 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$$

6άδα φύλλων με ακριβώς 3 σπαθιά



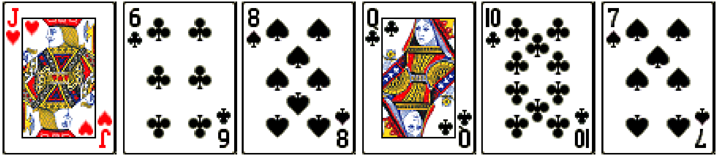
Πόσες 6άδες από μια τράπουλα με 3 σπαθιά (χωρίς σειρά τα φύλλα);

Πώς κατασκευάζουμε μια τέτοια εξάδα;

Πρώτα επιλέγουμε τα 3 σπαθιά, μετά τα 3 μη σπαθιά.

$$\binom{13}{3} \cdot \binom{39}{3}$$

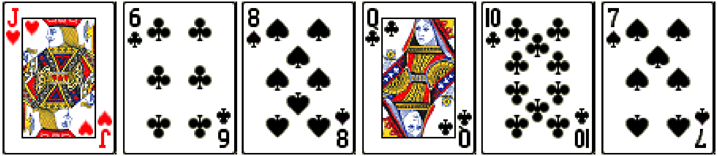
6άδα φύλλων με ακριβώς 3 σπαθιά: πιθανοθεωρητική ερμηνεία



Αν τραβήξουμε στην τύχη μια 6άδα (=«όλες οι 6άδες ισοπίθανες») ποια η πιθανότητα να έχει ακριβώς 3 σπαθιά;

$$P = \frac{\binom{13}{3} \cdot \binom{39}{3}}{\binom{52}{6}}$$

6άδα φύλλων με τουλάχιστον 3 σπαθιά



Πόσες 6άδες από μια τράπουλα με τουλάχιστον 3 σπαθιά (χωρίς σειρά τα φύλλα);

Πώς κατασκευάζουμε μια τέτοια εξάδα;

Πρώτα επιλέγουμε 3 σπαθιά. $\longrightarrow \binom{13}{3}$

Μετά 3 φύλλα από όλα τα υπόλοιπα.

$\longrightarrow \binom{49}{3}$

$$\binom{13}{3}\cdot\binom{49}{3}$$

6άδα φύλλων με τουλάχιστον 3 σπαθιά

κατασκευή
1) 3 σπαθιά ✓
2) 3 ό,τι άλλο φύλλο ✓

A	B
1σπ, 2σπ, 3σπ	4σπ, 1 καρ. 1 κούπα
1 σπ, 2σπ, 4σπ	3σπ, 1καρώ 1 κούπα

1 σπ, 2 σπ, 3 σπ, 4 σπ, 1 καρώ, 1 κούπα

4 σπαθιά ✓

Λάθος!

$$\cancel{\binom{13}{3}\binom{49}{3}}$$

6άδα φύλλων με τουλάχιστον 3 σπαθιά: το σωστό

$$\binom{n}{1} = n$$

$$|C_3| = \binom{13}{3}\cdot\binom{39}{3}$$

$$|C_5| = \binom{13}{5}\cdot\binom{39}{1} \quad \binom{39}{1}=39$$

$$|C_4| = \binom{13}{4}\cdot\binom{39}{2}$$

$$|C_6| = \binom{13}{6}$$

Μετράμε πόσες εξάδες έχουν ακριβώς 3, πόσες έχουν ακριβώς 4 κλπ.

C_3 = εξάδες με 3 σπαθιά ακριβώς

C_4 = —— " —— 4 —— " ——

C_5 = —— 5 ——

C_6 = —— 6 ——

} ξένες κατηγορίες

$$|C_3| + |C_4| + |C_5| + |C_6|$$

k αντικείμενα από n με επανάθεση

«Επανάθεση»: μπορώ να χρησιμοποιήσω κάθε στοιχείο πολλές φορές.

Παρατήρηση: Μπορεί να έχουμε $k > n$, λόγω επανάθεσης.

$n = 10$

$k = 5$

1, 1, 2, 7, 9

1. Όταν έχει σημασία η σειρά, εύκολο.

$\underbrace{n}_{1^o} \; \underbrace{n}_{2^o} \; \cdots \; \underbrace{n}_{k^o}$ $\qquad n^k$

7, 1, 7, 1, 7 ← $\boxed{1, 1, 7, 7, 7}$

2. Όταν δεν έχει σημασία η σειρά:

$5 = \underset{2}{x_1} + \underset{0}{x_2} + \underset{3}{x_7} + \underset{0}{x_{10}}$

Μας ενδιαφέρει μόνο το πόσες φορές επιλέξαμε το κάθε ένα από τα n.

$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

x_j = πόσες φορές επιλέχθηκε το j

$0 \leq x_j \leq k$

διαμερίσεις του k σε n προσθετέους.

k αντικείμενα από n με επανάθεση

$14 = n + k - 1$

$k = 4$

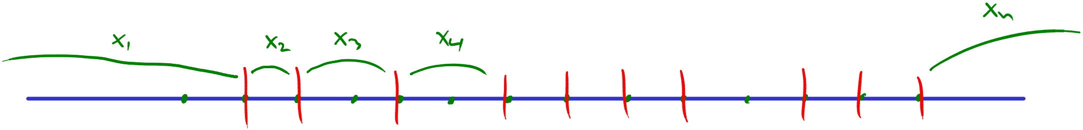
$n = 11$

Πόσες «διαμερίσεις» του k σε n κομμάτια

$$k = x_1 + x_2 + \cdots x_n, \qquad \text{με } x_j \geq 0;$$

$n + k - 1$ κουκίδες

1 – 1 σχέση



- Επιλέγω $n - 1$ κουκίδες από τις $n + k - 1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Τις μετατρέπω σε χωρίσματα → δημιουργώ k κουτιά

«n ανά k με επανάθεση»: $\boxed{\left\langle {n \atop k} \right\rangle} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$