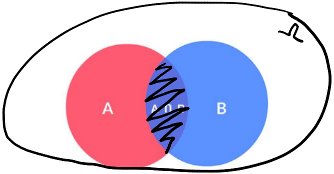
Πιθανότητα υπό συνθήκη



N φορές

$\mathbb{P}(B) \cdot N$ ισχύει το B

$\mathbb{P}(A \cap B) \cdot N$ ισχύει και το A

A και B είναι δύο ενδεχόμενα στον ίδιο δειγματικό χώρο Ω, με $\mathbb{P}[B] > 0$.

Αν γνωρίζουμε ότι ισχύει το B (*δέσμευση*) ποια η πιθανότητα ότι ισχύει το A;

Ορισμός: Πιθανότητα του A δεδομένου του B: $\mathbb{P}[A \mid B] = \dfrac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$.

$\mathbb{P}[B] \neq 0$

↳ σχετικό κομμάτι του B που καταλαμβάνει

$\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \cap B)$

Πιθανότητα υπό συνθήκη: παραδείγματα

$$\tfrac{1}{2} \leftarrow B = \{\underline{1,\ 3,\ 5}\}$$

$$A = \{\underline{1}\}$$

$$A \cap B = \{1\}$$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

Ρίχνουμε ζάρι. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε 1 δεδομένου ότι το αποτέλεσμα είναι περιττό;

Πιθανότητα υπό συνθήκη: παραδείγματα

Ρίχνουμε 2 ζάρια. Ποια η $\overbrace{\text{πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα} \geq 8}^{A}$ δεδομένου ότι το $\underbrace{\text{πρώτο ζάρι φέρνει 5}}_{B}$;

$$\Omega = \{(a,b) : 1 \leq a,b \leq 6\} \rightarrow P(\cdot) = 1/36$$

$$B = \{(5,x) : x = 1,2,..,6\} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

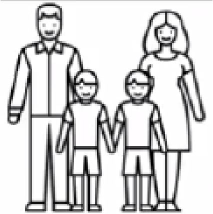
$$A \cap B = \{(5,x) : 5+x \geq 8\}$$

$$= \{(5,x) : x \geq 3\}$$

$$= \{(5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{36}$$

$$P(A \mid B) = \frac{4/36}{6/36} = \frac{2}{3}$$

Πιθανότητα υπό συνθήκη: παραδείγματα



$$\Omega = \{\overset{1/4}{KK}, \overset{1/4}{KA}, \overset{1/4}{AK}, \overset{1/4}{AA}\}$$

$$B = \{KA, AK, AA\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 3/4$$

$$A \cap B = \{AA\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$$

Οικογένεια κάνει 2 παιδιά.

Ποια η πιθανότητα $\underbrace{\text{και τα 2 αγόρια}}_{A}$ δεδομένου ότι $\underbrace{\text{τουλάχιστον 1 είναι αγόρι}}_{B}$;

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3.$$

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

ανεξαρτησία

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Rightarrow \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

Αν $\mathbb{P}(B) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0$

Αν $\mathbb{P}[A \mid B] = \mathbb{P}[A]$ τότε τα ενδεχόμενα A, B λέγονται *ανεξάρτητα* (το να γνωρίζουμε ότι ισχύει το B δε μας αλλάζει τις πιθανότητες για το A).

Καλύτερα ορίζεται ως:

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$$

(καλύπτει και την περίπτωση $\mathbb{P}[B] = 0$).

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα: παραδείγματα

Δύο ζάρια.
Ενδεχόμενο A = το πρώτο ζάρι άρτιο.
Ενδεχόμενο B = το δεύτερο ζάρι είναι 1 ή 2.

$$A = \{(\underbrace{\text{άρτιο}}_{3 \text{ αριθμοί}}, \underbrace{*}_{6 \text{ αριθμοί}})\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(\underbrace{*}_{6}, \underbrace{1 \text{ ή } 2}_{2})\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$A \cap B = \{(\underbrace{\text{άρτιο}}_{3}, \underbrace{1 \text{ ή } 2}_{2})\} \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\mathbb{P}(A)} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\mathbb{P}(B)}$$

A, B ανεξάρτητα

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα: παραδείγματα

Ένα ζάρι.

Ενδεχόμενο $A =$ το αποτέλεσμα είναι πολλαπλάσιο του 2.

Ενδεχόμενο $B =$ το αποτέλεσμα είναι πολλαπλάσιο του 3.

$A = \{2, 4, 6\} \longrightarrow$ πιθ. $\frac{1}{2}$

$B = \{3, 6\} \longrightarrow$ πιθ. $\frac{1}{3}$

$A \cap B = \{6\} \longrightarrow$ πιθ $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

ανεξαρτησία

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα: παραδείγματα

Τραβάμε ένα χαρτί από μια τράπουλα.
Ενδεχόμενο $A =$ τραβάμε $\heartsuit$.
Ενδεχόμενο $B =$ τραβάμε 7.

$A = \{1\heartsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit, \dots, K\heartsuit\} \to 13$ στοιχεία

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$

$B = \{$7 σπαθί, 7 μπαστ., 7 καρό, 7 κούπα$\} \to 4$

$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{13}$

$A \cap B = \{7\heartsuit\} \to \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

ανεξαρτησία.

Παραπάνω από δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$

A_j, $j = 1, 2, \ldots$, μια *οικογένεια ενδεχομένων*.

Λέγονται *ανεξάρτητα* αν όποια από αυτά και να διαλέξουμε

διαφορετικά

$$A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_N} \text{ οσοδήποτε}$$

ισχύει

$$\mathbb{P}\left[A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_N}\right] = \mathbb{P}\left[A_{j_1}\right] \cdot \mathbb{P}\left[A_{j_2}\right] \cdots \mathbb{P}\left[A_{j_N}\right].$$

Δεν αρκεί να είναι ανά δύο ανεξάρτητα.

Π.χ. τρία ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 είναι ανεξάρτητα αν επιπλέον των συνθηκών ανά δύο ισχύει και

$$\mathbb{P}\left[A_1 \cap A_2 \cap A_3\right] = \mathbb{P}\left[A_1\right] \cdot \mathbb{P}\left[A_2\right] \cdot \mathbb{P}\left[A_3\right].$$

Παράδειγμα: τρία ενδεχόμενα ανεξάρτητα μόνο ανά δύο

$A \cap B = \{30\} \longrightarrow 1/4$

$A \cap C = \{30\} \longrightarrow 1/4$

$B \cap C = \{30\} \longrightarrow 1/4$

Πείραμα: επιλέγουμε τυχαία και ομοιόμορφα ένα από τους αριθμούς

$$2, 3, 5, 30.$$

$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad 1/4$

Ενδεχόμενο A: το αποτέλεσμα είναι πολλαπλάσιο του 2. $A = \{2, 30\} \longrightarrow 1/2$

Ενδεχόμενο B: το αποτέλεσμα είναι πολλαπλάσιο του 3. $B = \{3, 30\} \longrightarrow 1/2$

Ενδεχόμενο C: το αποτέλεσμα είναι πολλαπλάσιο του 5. $C = \{5, 30\} \longrightarrow 1/2$

πιθ.

$$\underbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}_{\frac{1}{4}} = \underbrace{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}_{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \{30\} \xrightarrow{\text{πιθ.}} \frac{1}{4}$$

$$\stackrel{?}{=} \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4}$$

Ανεξαρτησία στην πράξη

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Συνήθως η ανεξαρτησία **μας δίνεται** από το πείραμα/μοντέλο.

Παράδειγμα 1: Ρίχνω 4 ζάρια και

$$A = \{\text{τα δύο πρώτα ίσα}\}, \quad B = \{\text{τα δύο τελευταία αθροίζονται σε } 6\}$$

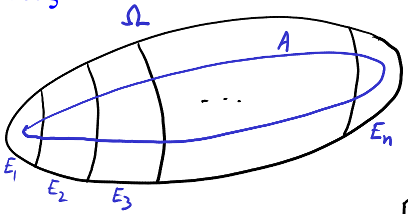
Είναι ανεξάρτητα. Αυτό είναι λογικό γιατί δεν επηρεάζουν οι δύο πρώτες ρίψεις τις δύο τελευταίες.

Παράδειγμα 2: Έστω R_d το ενδεχόμενο να βρέχει την ημερομηνία d.

$$R_d \text{ και } R_{d+(\text{ένα έτος})} \text{ είναι ανεξάρτητα}$$

Γιατί έτσι λέει το μοντέλο μου. Μια λογική υπόθεση.

Τύπος Ολικής Πιθανότητας



$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B)$$

Διαμέριση $\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$, με E_j ανά δύο ξένα.

$$A = \underbrace{(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ldots \cup (A \cap E_n)}_{\text{ξένα ανά δύο}}$$

Τύπος Ολικής Πιθανότητας: $\mathbb{P}[A] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A \mid E_j] \cdot \mathbb{P}[E_j]$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap E_1) + \ldots + \mathbb{P}(A \cap E_n) = \mathbb{P}(A \mid E_1)\,\mathbb{P}(E_1) + \ldots + \mathbb{P}(A \mid E_n)\,\mathbb{P}(E_n)$$

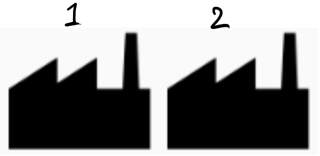
Τύπος Ολικής Πιθανότητας: μια εφαρμογή

$E_1 = E$, $E_2 = E^c$

$\Omega = E \cup E^c$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid E_j)\,\mathbb{P}(E_j), \quad \Omega = E_1 \cup \dots \cup E_n$$

E_j ανά δύο ξένα



E = λάμπα προήλθε εργ 1

E^c = - - - - - - εργ 2

Εργοστάσια 1 και 2 φτιάχνουν λάμπες.

Ποιότητα: Εργ. 1: 99% δουλεύουν, Εργ. 2: 95% δουλεύουν

Ποσότητα: Εργ. 1: παράγει το 60% του συνόλου, Εργ. 2: παράγει το 40% του συνόλου

Ποια η πιθανότητα η τυχαία $\overbrace{\text{λάμπα να δουλεύει;}}^{A}$

$$\mathbb{P}(A) = \underbrace{\mathbb{P}(A \mid E)}_{0.99}\,\underbrace{\mathbb{P}(E)}_{0.6} + \underbrace{\mathbb{P}(A \mid E^c)}_{0.95}\,\underbrace{\mathbb{P}(E^c)}_{0.4} = 0.99 \times 0.6 + 0.95 \times 0.4$$

Τύπος Ολικής Πιθανότητας: μια εφαρμογή

Τα ίδια εργοστάσια συσκευάζουν τις λάμπες τους σε τετράδες.

E, E^c

εργ 1, εργ.2

A

Αν αγοράσουμε μια τυχαία τετράδα, ποια η πιθανότητα ότι θα δουλεύουν όλες;

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid E)\underbrace{\mathbb{P}(E)}_{0.6} + \mathbb{P}(A \mid E^c)\underbrace{\mathbb{P}(E^c)}_{0.4}$$

Υπόθεση: Οι λάμπες δουλεύουν ή όχι ανεξάρτητα. ✓

$$\mathbb{P}(A \mid E) = \mathbb{P}(\underbrace{L_1 \text{ δουλεύει}}, \ldots, \underbrace{L_4 \text{ δουλεύει}}) = \mathbb{P}(L_1 \text{ δουλ}) \cdots \mathbb{P}(L_4 \text{ δουλ.}) = 0.99^4$$

$$\mathbb{P}(A \mid E^c) = \quad = 0.95^4$$

$$\mathbb{P}(A) = 0.99^4 \cdot 0.6 + 0.95^4 \cdot 0.4 = \ldots$$

Ο τύπος του Bayes

Ας είναι $\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ μια διαμέριση και $A \subseteq \Omega$.

Γνωρίζουμε τις πιθανότητες $\mathbb{P}\left[A \mid E_j\right]$ και $\mathbb{P}\left[E_j\right]$ για όλα τα j. ✓

Αν ξέρουμε ότι ισχύει το A ποια η πιθανότητα ότι ισχύει το E_i,

$$\mathbb{P}\left[E_i \mid A\right];$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(E_i \mid A)}_{\mathbb{P}(A \cap E_i)} = \underbrace{\mathbb{P}(A \mid E_i)\,\mathbb{P}(E_i)}_{\mathbb{P}(A \cap E_i)}$$

Τύπος του Bayes:

$$\mathbb{P}\left[E_i \mid A\right] = \frac{\mathbb{P}\left[A \mid E_i\right] \cdot \mathbb{P}\left[E_i\right]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left[A \mid E_j\right] \cdot \mathbb{P}\left[E_j\right]}$$

$0 \neq \mathbb{P}(A) =$

Ο τύπος του Bayes: εφαρμογή

Πίσω στα 2 εργοστάσια για λάμπες.

Ποιότητα: Εργ. 1: 99% δουλεύουν, Εργ. 2: 95% δουλεύουν
Ποσότητα: Εργ. 1: παράγει το 60% του συνόλου, Εργ. 2: παράγει το 40% του συνόλου

Εργ. 1 Εργ. 2

Αν πάρουμε μια τυχαία λάμπα και είναι χαλασμένη, με τι πιθανότητα προήλθε από το 1ο εργοστάσιο;

$A =$ χαλασμένη λάμπα

$$\left[\underline{\Omega = E \cup E^c} \quad \underline{\mathbb{P}(E \mid A)} = \frac{\overbrace{\mathbb{P}(A \mid E)}^{0.01} \cdot \overbrace{\mathbb{P}(E)}^{0.6}}{\underbrace{\mathbb{P}(A \mid E)\mathbb{P}(E)}_{0.01 \cdot 0.6} + \underbrace{\mathbb{P}(A \mid E^c)}_{0.05 \cdot} \underbrace{\mathbb{P}(E^c)}_{0.4}}\right]$$

Τύπος Bayes για $\Omega = E \cup E^c$

✓

Ο τύπος του Bayes: εφαρμογή

Μια πραγματική ιστορία

Μια ασθένεια έχει συχνότητα εμφάνισης 1 στα 1000.

Διαγνωστικό γι' αυτήν δίνει *εσφαλμένη* θετική απάντηση με πιθ. 5%.
Βγαίνει πάντα θετικό για ασθενείς.

Αν βγεί θετικό το τεστ, ποια η πιθανότητα ότι υπάρχει η ασθένεια;

Ο τύπος του Bayes: εφαρμογή

The NEW ENGLAND JOURNAL of MEDICINE

This article is available to subscribers. Already subscribed? Sign in.

MEDICAL INTELLIGENCE FREE PREVIEW ARCHIVE

Interpretation by Physicians of Clinical Laboratory Results

Ward Casscells, B.S., Arno Schoenberger, M.D., and Thomas B. Graboys, M.D.

Μέση απάντηση (από 60 γιατρούς στο Harvard Medical School): **55.9%**

Ο τύπος του Bayes: εφαρμογή

Η πραγματικότητα

Θέλουμε την $\mathbb{P}\left[\text{ασθενής} \mid \text{θετικό τεστ}\right]$

Εφαρμόζουμε τύπο Bayes για τη διαμέριση $\Omega = \{\text{ασθενής}\} \cup \{\text{υγιής}\}$.

$$\mathbb{P}(\text{ασθ} \mid \text{θετ}) = \frac{\overbrace{\mathbb{P}(\text{θετ} \mid \text{ασθ})}^{1}\, \overbrace{\mathbb{P}(\text{ασθ})}^{0.001}}{\underbrace{\mathbb{P}(\text{θετ} \mid \text{ασθ})\, \mathbb{P}(\text{ασθ})}_{0.001} + \underbrace{\mathbb{P}(\text{θετ} \mid \text{υγιής})\, \mathbb{P}(\text{υγιής})}_{0.05 \cdot 0.999}} = \frac{0.001}{0.\cancel{001} + 0.05 \cdot 0.\cancel{999}}$$

$$\simeq \frac{10^{-3}}{5 \cdot 10^{-2}} = \frac{1}{50} = 2\%$$