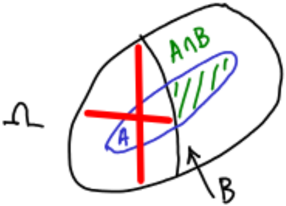
# Δέσμευση ως προς ενδεχόμενο

Έχουμε δει την πιθανότητα ενδεχομένου $A$ αν ξέρουμε ότι ισχύει $B$:

$$\underline{\mathbb{P}[A \mid B]} = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \qquad \mathbb{P}(B) > 0$$

Δέσμευση ως προς ενδεχόμενο $B$ = νέος δειγματικός χώρος

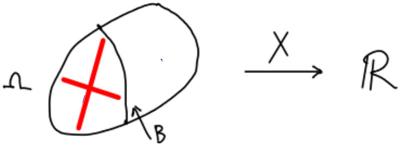
Πετάμε το συμπλήρωμα του $B$.




Αναπροσαρμόζουμε τις πιθανότητες στο $B$ ώστε συνολικά να είναι 1.

Νέες πιθανότητες: η νέα πιθανότητα του ενδεχομένου $A$ είναι η $\dfrac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$.

# Δέσμευση μιας ΤΜ ως προς ενδεχόμενο $B$




Η ΤΜ $X\,|\,B$ είναι ο περιορισμός της $X$ στο ενδεχόμενο $B$.

Ποια είναι η κατανομή της $X\,|\,B$;

$$f_{X\,|\,B}(n) = \mathbb{P}\left[X = n\,|\,B\right] = \frac{\mathbb{P}\left[B,\ X = n\right]}{\mathbb{P}\left[B\right]}$$

και

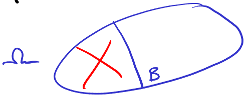
$$\mathbb{E}\left[X\,|\,B\right] = \sum_n n f_{X\,|\,B}(n) = \sum_n n\mathbb{P}\left[X = n\,|\,B\right]$$

Η δέσμευση ΤΜ ως προς ενδεχόμενο ορίζεται τελείως διαφορετικά για συνεχείς ΤΜ.
Εδώ περιοριζόμαστε σε διακριτές ΤΜ.

# Δέσμευση μιας ΤΜ ως προς ενδεχόμενο $B$: παράδειγμα

$X =$ το αποτέλεσμα ενός ζαριού, άρα $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$B = \{X \in \{2, 4, 6\}\} =$ το αποτέλεσμα είναι άρτιο.




Ποια η πυκνότητα της $X \,|\, B$; Ποια η μέση τιμή της;

$$f_{X|B}(n) = \begin{cases} 0 & n \notin \{2,4,6\} \\ 1/3 & n \in \{2,4,6\} \end{cases}$$

$$= \mathbb{P}(X = n \mid B)$$

$$\frac{1/6}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{3}$$

# Τύπος ολικής μέσης τιμής

Έστω $\Omega = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots$ μια διαμέριση του $\Omega$.

Τύπος ολικής πιθανότητας: $\mathbb{P}[A] = \sum_j \mathbb{P}[A \mid E_j] \mathbb{P}[E_j]$

Τύπος ολικής μέσης τιμής: $\mathbb{E}[X] = \sum_j \mathbb{E}[X \mid E_j]\, \mathbb{P}[E_j]$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_n n \mathbb{P}[X = n] \quad &&(\text{το } n \text{ διατρέχει όλες τις τιμές του } X) \\
&= \sum_n n \sum_j \mathbb{P}[X = n \mid E_j] \mathbb{P}[E_j] \quad &&(\text{τύπος ολικής πιθανότητας για το } \{X = n\}) \\
&= \sum_j \mathbb{P}[E_j] \sum_n n \mathbb{P}[X = n \mid E_j] \quad &&(\text{αλλαγή σειράς άθροισης}) \\
&= \sum_j \mathbb{P}[E_j] \cdot \mathbb{E}[X \mid E_j] .
\end{aligned}
$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή μιας ΤΜ ως προς ΤΜ

$\mathbb{E}[X \mid Y]$ = «Πόσο είναι η $X$ κατά μέσο όρο αν γνωρίζουμε την τιμή της $Y$;»

Άρα $\mathbb{E}[X \mid Y]$ εξαρτάται από την τιμή της $Y$, είναι δηλ. κάποια συνάρτηση $\phi(Y)$.

Αν γνωρίζουμε ότι $Y = n$ ποια είναι η μέση τιμή της $X$;   $\mathbb{E}[X \mid \underbrace{Y = n}_{\text{ενδεχόμενο}}]$

Άρα η συνάρτηση $\phi(n)$ είναι

$$\boxed{\phi(n) = \mathbb{E}[X \mid Y = n]\,.}$$

Τονίζουμε: η $\underset{\underset{\phi(Y)}{\shortparallel}}{\mathbb{E}[X \mid Y]}$ είναι ΤΜ, όχι αριθμός!

# Ένα λεπτό σημείο

Ορίσαμε την ΤΜ $\mathbb{E}[X \mid Y]$ ως μια συνάρτηση του $Y$, $\mathbb{E}[X \mid Y] = \phi(Y)$, όπου

$$\phi(y) = \mathbb{E}[X \mid Y = y].$$

Τι γίνεται όμως όταν το $y$ είναι τέτοιο ώστε $\mathbb{P}[Y = y] = 0$;

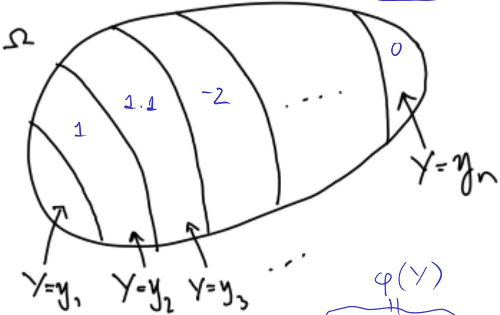
με πιθανότητα 1

$\mathbb{E}[X \mid Y]$ ορίζεται σε όλα τα $\omega$ εκτός από αυτά που ανήκουν σε ενδεχόμενα $\{Y = y_j\}$, $j = 1, 2, \dots$

$\varphi(Y)$

$y_1, y_2, \dots$ είναι τα $y$ για τα οποία $\mathbb{P}(Y = y_j) = 0$.

# Δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}[X \mid Y]$




$y_1, y_2, \ldots, y_n$ οι δυνατές τιμές της $Y$.

Το $\Omega$ χωρίζεται σε «φέτες» ανάλογα με την τιμή της $Y$.

Η ΤΜ $\mathbb{E}[X \mid Y]$ είναι *σταθερή* σε κάθε τέτοια φέτα με τιμή $\mathbb{E}[X \mid Y = y_j]$.

Ποια η μέση τιμή της ΤΜ $\overset{\varphi(Y)}{\overset{\|}{\mathbb{E}[X \mid Y]}}$;

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \sum_j (\text{τιμή στη φέτα } \{Y = y_j\}) \cdot \mathbb{P}[Y = y_j]$$

$$= \sum_j \mathbb{E}[X \mid Y = y_j] \cdot \mathbb{P}[Y = y_j] \qquad \bigcup_{j=1}^{n} \{Y = y_j\} = \Omega$$

$$= \mathbb{E}[X] \quad (\text{από τον τύπο ολικής μέσης τιμής}).$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}X$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}[X \mid Y]$: ιδιότητες

$X \leq Y$

$\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$

1. $\mathbb{E}[\lambda X + \mu Y \mid Z] = \lambda \mathbb{E}[X \mid Z] + \mu \mathbb{E}[Y \mid Z]$ (γραμμικότητα).
2. Αν πάντα $X \leq Y$ τότε ισχύει πάντα $\mathbb{E}[X \mid Z] \leq \mathbb{E}[Y \mid Z]$ (μονοτονία).
3. $\mathbb{E}[X \mid X] = X$
4. Αν $X, Y$ ανεξάρτητες τότε $\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X]$.
5. Αν η $Z$ είναι συνάρτηση της $Y$, $Z = f(Y)$, τότε

$$\mathbb{E}[Z \cdot X \mid Y] = Z \cdot \mathbb{E}[X \mid Y].$$

$\{Y = y_1\}$

$Z = z_1 = f(y_1)$

$z_1 \cdot X$

6. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y] \mid Y] = \mathbb{E}[X \mid Y]$.
7. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \mathbb{E}[Y]$.

# Δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}[X \mid Y]$: παράδειγμα

$X$ και $Y$ τα αποτελέσματα, $Z = X + Y$.

$1 + 2 \to 1/36$

$2 + 1 \to 1/36$

$2/36$

$$\mathbb{E}[Z \mid X] = \mathbb{E}[X + Y \mid X] = \overset{X}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}[X \mid X]}} + \mathbb{E}[Y \mid X] = X + \mathbb{E}[Y] = X + 3.5$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X \mid Z]} = \varphi(Z)$$

$Z \in \{2, 3, \dots, 12\}$

$\varphi(2), \varphi(3), \dots, \varphi(12)$

$\varphi(2) = \mathbb{E}(X \mid Z = 2) = 1$

$\varphi(3) = \mathbb{E}(X \mid Z = 3) = 1.5$

$X = 1$ με πιθ. $1/2$

$= 2$ με πιθ $1/2$

$\varphi(4) = \dots$

# Δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}[X \mid Y]$: παράδειγμα

$1/4$ $\quad$ $1/2$ $\quad$ $3/4$


$P$ η πιθ. κορώνας που επιλέχθηκε.

$\mathbb{E}[X \mid P] = \dfrac{1}{P}$

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid P)\right] = \mathbb{E}\left[\dfrac{1}{P}\right] = \dfrac{1}{3}\cdot 4 + \dfrac{1}{3}\cdot 2 + \dfrac{1}{3}\,\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}\left(7 + \dfrac{1}{3}\right)$

Οι πιθανότητες κορώνας είναι $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.

Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα τρία νομίσματα.

Ρίχνουμε μέχρι 1η κορώνα. $X$ είναι ο αριθμός ρίψεων.

# Τυχαίος αριθμός από ζάρια

Ρίχνουμε ένα ζάρι, με αποτέλεσμα $N$.

Έπειτα ρίχνουμε $N$ ζάρια με αποτελέσματα $X_1, X_2, \ldots, X_N$.

$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$

$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 + \cdots + \mathbb{E}X_N = N \cdot \mathbb{E}X_1 = 3.5 \cdot N$

Ποια η μέση τιμή του $S$;

T.M.

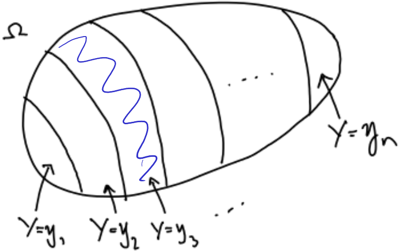
$\mathbb{E}S = \mathbb{E}(\mathbb{E}(S \mid N)) = \mathbb{E}(3.5 \cdot N) = 3.5\, \mathbb{E}N = 3.5^2$

Γενικότερα: αν $X_1, X_2, \ldots$ ισόνομες και οι ΤΜ $N$ και $X_j$ ανεξάρτητες

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} X_j\right] = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{1}^{N} X_j \;\middle|\; N\right)\right) = \mathbb{E}(N \cdot \mathbb{E}X_1) = \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}N$$

$\mathbb{E}(X_1 \mid N) = \mathbb{E}X_1$

# Δεσμευμένη διασπορά




Αν γνωρίζουμε το $Y$ ποια η διασπορά του $X$;
Αυτό είναι συνάρτηση του $Y$.

Είναι η διασπορά του $X$ αν περιοριστούμε σε μια «φέτα» $\{Y=y\}$.

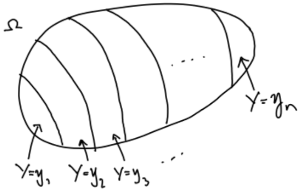
**Δεσμευμένη διασπορά:**

$$\sigma^2(X \mid Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X \mid Y])^2 \mid Y\right].$$

Ισχύει και πάλι: $\sigma^2(X \mid Y) = \mathbb{E}\left[X^2 | Y\right] - (\mathbb{E}[X \mid Y])^2$.

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

# Τύπος ολικής διασποράς




$$\sigma^2(X) = \sigma^2(\mathbb{E}[X|Y]) + \mathbb{E}\left[\sigma^2(X \mid Y)\right]$$

(διασπορά) =
(διασπορά από φέτα σε φέτα) + (μέση διασπορά μέσα στις φέτες)

**Εφαρμογή** σε αθροίσματα με τυχαίο πλήθος όρων: $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$.
Εδώ $N, X_j$ ανεξάρτητες ανά δύο, $X_j$ ισόνομες.

$$\begin{aligned}
\sigma^2(S) &= \sigma^2(\mathbb{E}[S \mid N]) + \mathbb{E}\left[\sigma^2(S \mid N)\right] \\
&= \sigma^2(N \cdot \mathbb{E}[X_1]) + \mathbb{E}\left[N\sigma^2(X_1)\right] \\
&= \mathbb{E}[X_1]^2 \sigma^2(N) + \sigma^2(X_1)\mathbb{E}[N].
\end{aligned}$$