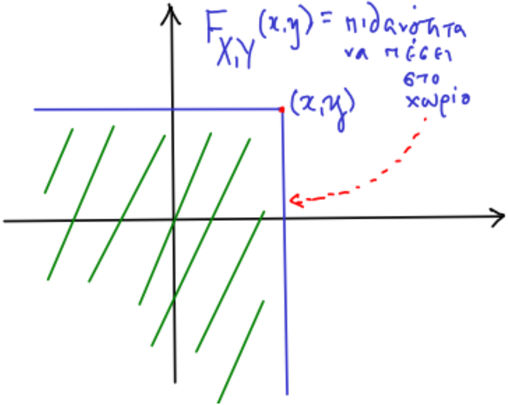
Κοινή κατανομή δυο συνεχών ΤΜ

Το ζεύγος (X, Y) παίρνει τιμές στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$.



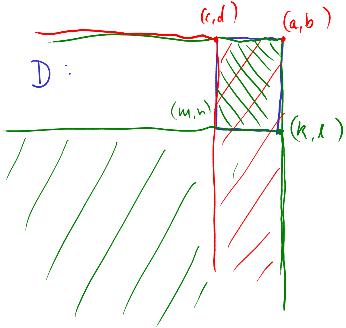
Κοινή συνάρτηση κατανομής $F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}\left[X \le x, Y \le y\right]$.

X, Y ανεξάρτητες $\Longrightarrow F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

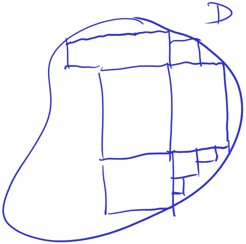
Η κοινή συνάρτηση κατανομής καθορίζει όλες τις πιθανότητες

Γιατί αρκεί η $F_{X,Y}(\cdot,\cdot)$ για να καθορίσει τις πιθανότητες

$$\mathbb{P}\left[(X,Y)\in D\right] \text{ για τυχόν } D \subseteq \mathbb{R}^2;$$

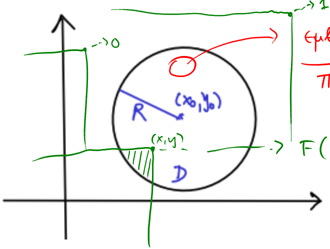


$$F_{X,Y}(a,b) - F_{X,Y}(c,d) - F_{X,Y}(k,l) + F_{X,Y}(m,n) = \mathbb{P}(X \in D)$$



Παραδείγματα

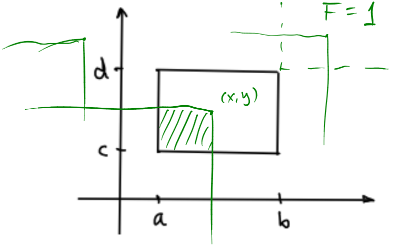
1. (X, Y) ομοιόμορφη στο δίσκο $D = \{(x, y) : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R\}$.



$\frac{\text{Εμβ}(O)}{\pi R^2}$

$F(x,y) = \frac{\text{Εμβ}(\text{▨})}{\pi R^2}$

2. (X, Y) ομοιόμορφη στο ορθογώνιο $[a, b] \times [c, d]$.

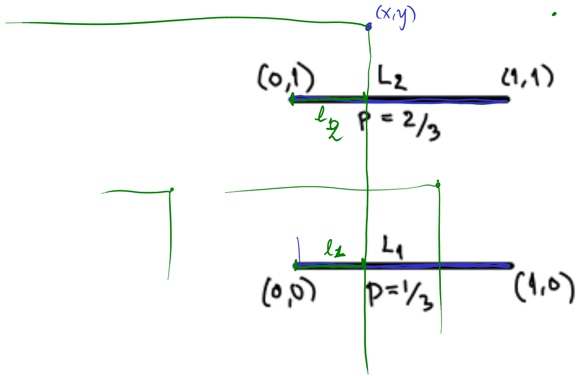


$\frac{\text{Εμβ}(\text{▨})}{(b-a)(d-c)}$

Ένα πιο περίπλοκο παράδειγμα

Γ με πιθ 1/3
K 2/3

$$(X,Y) \text{ είναι } \begin{cases} \text{ομοιόμορφη στο ευθ. τμήμα } L_1 & \text{με πιθαν. } 1/3 \\ \text{ομοιόμορφη στο ευθ. τμήμα } L_2 & \text{με πιθαν. } 2/3 \end{cases}$$



$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}((X,Y) \in l_2) + \mathbb{P}((X,Y) \in l_1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\text{μήκος}(l_2)}{\text{μήκος}(L_2)} = \frac{1}{3}\,\text{μήκ}(l_2)$$

$$\frac{2}{3}\,\text{μήκος}(l_1)$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{μήκ}(l_2) + \frac{2}{3}\,\text{μήκ}(l_1)$$

Πυκνότητα ζεύγους

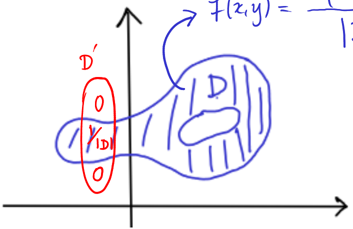
$$\iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy = \mathbb{P}\big((X,Y) \in D'\big)$$

$$\frac{\text{εμβ}(D' \cap D)}{|D|} = \text{πιθ. ομοιόμ. κατ. } (X,Y) \text{ να είναι μέσα στο } D' \cap D$$

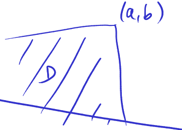
Η (X, Y) έχει πυκνότητα της συνάρτηση $f_{X,Y}(x, y)$ αν

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in D] = \iint_D f_{X,Y}(x, y)\,dx\,dy, \quad \text{για κάθε χωρίο } D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

$$f(x,y) = \frac{\mathbb{1}\big((x,y) \in D\big)}{|D|}$$



Αρκεί να ελέγξουμε $\forall a, b \in \mathbb{R}$:



$$\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f_{X,Y}(x, y)\,dx\,dy = F_{X,Y}(a, b).$$

Ισχύει και πάλι $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ και $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y)\,dx\,dy = 1$.

Δεν έχουν όλα τα ζεύγη (X, Y) πυκνότητα.

Αν $f(x, y)$ συνεχής συνάρτηση τότε $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$.

Πυκνότητα ζεύγους ανεξαρτήτων ΤΜ

Αν X, Y ανεξάρτητες και έχουν πυκνότητα τότε

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε $F_{X,Y}(a,b) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f_X(x) f_Y(y)\, dy\, dx.$

$$= \int_{-\infty}^{a} f_X(x) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{b} f_Y(y)\, dy \right)}_{F_Y(b)} dx = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, F_Y(b)\, dx = F_Y(b) \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx$$

$$= F_Y(b)\, F_X(a) = F_{X,Y}(a,b)$$

Ισχύει και το αντίστροφο: χωρισμός μεταβλητών $\Longrightarrow$ ανεξαρτησία.

Η κανονική κατανομή

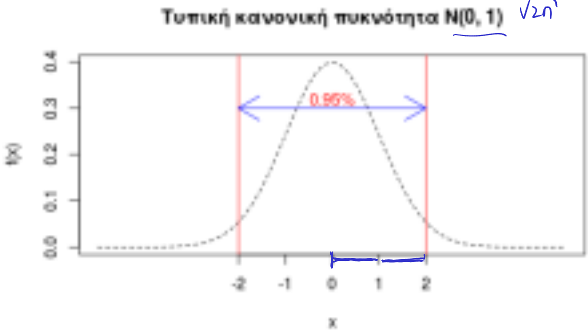
Κεντρικό οριακό θεώρημα

$X_1 + \dots + X_n$

Η κανονική πυκνότητα $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

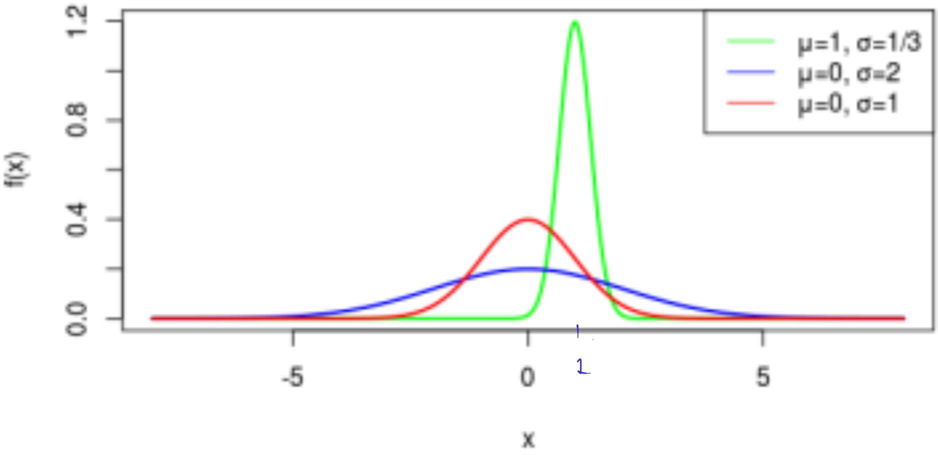


$$\mathcal{N}(0,1) : \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

μ είναι η μέση τιμή

σ είναι η τυπική απόκλιση

Η κανονική κατανομή για διαφορετικά μ, σ



Ένας υπολογισμός κλειδί για την κανονική πυκνότητα

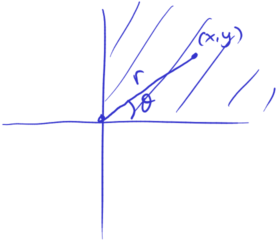
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\int e^{-x^2}dx \qquad I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \qquad I^2$$

Υπολογίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)}_{I} dy = I\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}du$$

$$4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(\overbrace{x^2+y^2}^{r^2})}\underbrace{dx\,dy}_{r\,dr\,d\theta} = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,2r\,dr\,d\theta$$



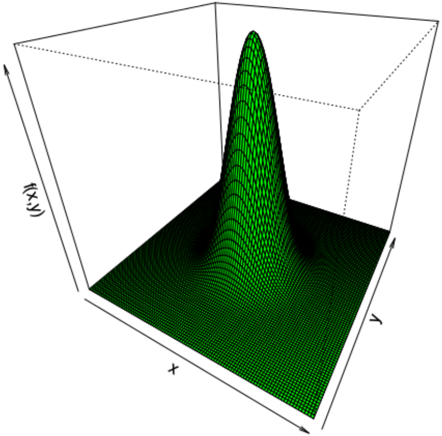
$z = r^2$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-z}dz}_{1}\,d\theta = \pi = I^2$$

$$I = \sqrt{\pi}.$$

Διδιάστατη κανονική κατανομή

$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$ (τυπική κανονική σε δύο διαστάσεις)



Χωρισμός μεταβλητών:

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\right)$$

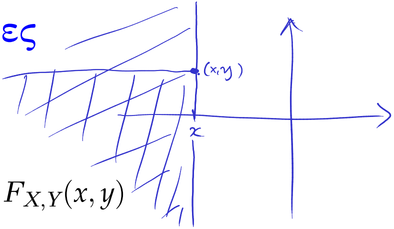
Ανεξαρτησία: $f_{X,Y}$ είναι η πυκνότητα ανεξάρτητου ζεύγους

$$(X, Y)$$

με $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ και $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Κοινή συνάρτηση κατανομής → περιθώριες

$F_{X,Y}(x,y)$



$$F_X(x) = \mathbb{P}\left[X \leq x\right] = \lim_{y \to +\infty} \mathbb{P}\left[X \leq x,\ Y \leq y\right] = \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y)$$

∞

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left[Y \leq y\right] = \lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}\left[X \leq x,\ Y \leq y\right] = \lim_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x,y)$$

Κοινή συνάρτηση πυκνότητας → περιθώριες

Αν το ζεύγος (X, Y) έχει πυκνότητα $\Longrightarrow$ υπάρχουν οι περιθώριες πυκνότητες

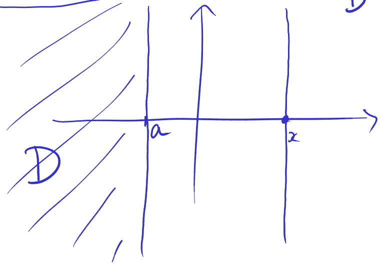
$\forall a \in \mathbb{R}$:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx = \iint_D f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \mathbb{P}\big((X,Y) \in D\big)$$

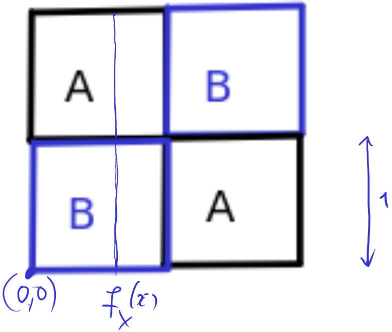
$$= \mathbb{P}(X \leq a)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$$



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

Οι περιθώριες δεν καθορίζουν την κοινή κατανομή



Αν το ζεύγος $\widehat{(X,Y)}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο είτε στο A είτε στο B τότε έχει τις ίδιες περιθώριες πυκνότητες.

$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ για ανεξάρτητες, συνεχείς X, Y

$$\mathbb{E}\, g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t)\, dt$$

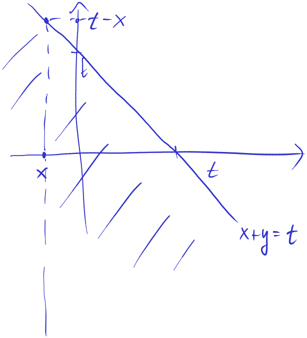
$$g(x,y) = x \cdot y$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \quad \text{(λόγω ανεξαρτησίας)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathbb{E}[Y]\, dx \\
&= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].
\end{aligned}
$$

$\mathbb{E} Y$

Ισχύει και χωρίς να υπάρχουν οι πυκνότητες.
Μόνη απαίτηση η ύπαρξη των $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$.

Η πυκνότητα της $X+Y$ για ανεξάρτητες X, Y με πυκνότητα



$$
\begin{aligned}
F_{X+Y}(t) &= \mathbb{P}\left[X+Y \le t\right] \\
&= \iint_{\{(x,y):\ x+y\le t\}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \int_{-\infty}^{t-x} f_Y(y)\,dy\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \int_{-\infty}^{t} f_Y(s-x)\,ds\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(s-x)\,dx}_{\text{αυτή είναι η } f_{X+Y}(s)}\,ds
\end{aligned}
$$

$$F_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{X+Y}(s)\,ds$$

$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(s-x)\,dx$$

Συνέλιξη δύο πυκνοτήτων

Συνέλιξη δύο $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f * g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(s-x)\,dx.$$

Αρκεί να υπάρχουν τα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ και $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx$.

Αντιμεταθετική πράξη: $f * g = g * f$.

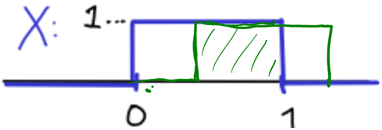
$$f * g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(s-x)\,dx \overset{y=s-x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(s-y)\,dy = g * f(s).$$

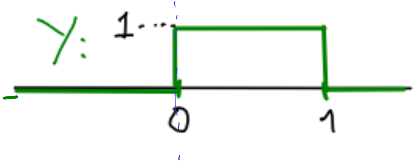
Δείξαμε

$$f_{X+Y}(s) = f_X * f_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(s-x)\,dx.$$

Συνέλιξη δύο πυκνοτήτων: παράδειγμα

Ας είναι X, Y ανεξάρτητες και ομοιόμορφες στο $[0,1]$. Ποια η f_{X+Y};





$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(s-x)\, dx$$

$$f_{X+Y}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(-x)\, dx = 0$$

$$f_{X+Y}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y\left(\tfrac{1}{2}-x\right) dx$$