Συνδιακύμανση (covariance) δύο ΤΜ

Ορισμός: $\mathbb{C}ov(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)\right]$, με $\mu_X = \mathbb{E}[X]$, $\mu_Y = \mathbb{E}[Y]$.

$$\mathbb{C}ov(X, X) = \mathbb{V}ar[X]$$

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

Κάνοντας πράξεις:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov(X, Y) &= \mathbb{E}\left[XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y\right] \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mu_X \overbrace{\mathbb{E}[Y]}^{\mu_Y} - \mu_Y \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\mu_X} + \mu_X \mu_Y \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

X, Y ανεξάρτητες $\Longrightarrow \mathbb{C}ov(X, Y) = 0.$

Η ανισότητα Cauchy-Schwarz

$\mathbb{E}|X\cdot Y| \leq$

Είναι η ανισότητα: $\mathbb{E}[X\cdot Y] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\cdot\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Ανάλογη της ομώνυμης ανισότητας στο $\mathbb{R}^n$.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_1^n x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_1^n y_i^2\right)^{1/2}$$

Απόδειξη: Για κάθε $t\in\mathbb{R}$ έχουμε $(X+tY)^2 \geq 0$ άρα

$$0 \leq \mathbb{E}\left[(X+tY)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] + 2\overset{\mathbb{E}(X\cdot Y)}{\cancel{\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]}}\cdot t + \mathbb{E}\left[Y^2\right]t^2 \quad \leftarrow \text{τριώνυμο του } t$$

άρα η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι ≤ 0:

$$\overset{\mathbb{E}(X\cdot Y)^2}{\cancel{(\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y])^2}} - \mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Y^2\right] \leq 0.$$

$$\left[\mathbb{E}(X\cdot Y)\right]^2 \leq \mathbb{E}X^2\cdot\mathbb{E}Y^2$$

$$\mathbb{E}(X\cdot Y) \leq |\mathbb{E}(X\cdot Y)| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2}\sqrt{\mathbb{E}Y^2}$$

$(X+tY)^2 \geq 0$, $\mathbb{E}(\ \cdot\ ) = 0$ } $X+tY$ είναι σχεδόν σίγουρα 0

$X = (-t)Y$

Πότε ισχύει η ισότητα;

$\longrightarrow$ υπάρχει $t\in\mathbb{R}$ τ.ώ. $\mathbb{E}\left[(X+tY)^2\right] = 0$

Συντελεστής συσχέτισης δύο ΤΜ

$$|Cov(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$$

Είναι ο αριθμός $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathbb{C}ov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

$$\left| \mathbb{E}\left[(X-\mu_X)\cdot(Y-\mu_Y)\right] \right| \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[(X-\mu_X)^2\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[(Y-\mu_Y)^2\right]}$$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz $\Longrightarrow -1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.

ανεξ $\Rightarrow Cov(X,Y)=0$

$\Rightarrow \rho(X,Y)=0$

Ονοματολογία: $\begin{cases} \rho(X,Y)=0 & \rightarrow X,Y \text{ ασυσχέτιστες} \\ \rho(X,Y)>0 & \rightarrow X,Y \text{ θετικά συσχετισμένες} \\ \rho(X,Y)<0 & \rightarrow X,Y \text{ αρνητικά συσχετισμένες} \end{cases}$

Προσοχή: ασυσχέτιστες $\not\Longrightarrow$ ανεξάρτητες

Π.χ. X ομοιόμορφη στο $\{\overset{1/4}{-2}, \overset{1/4}{-1}, \overset{1/4}{1}, \overset{1/4}{2}\}$, $Y = \begin{cases} 1 & \text{αν } X=\pm 1 \\ -1 & \text{αν } X=\pm 2 \end{cases}$.

$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X\cdot Y) = 0$

Συσχέτιση: η περίπτωση $Y = aX + b$

$a \neq 0$ $\qquad$ $X, \; aX+b$

Αν οι δύο ΤΜ συνδέονται ισχυρά ως εξής: $Y = aX + b$, όπου a, b σταθερές.

$$\mathbb{C}ov(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X-\mu_X)(aX+\cancel{b}-a\mu_X-\cancel{b})\right] = a\mathbb{E}\left[(X-\mu_X)^2\right] = a\sigma^2(X)$$

$$\rho(X,Y) = \frac{a\sigma^2(X)}{\sigma(X)\sigma(aX+b)} = \frac{a\sigma^2(X)}{\sigma(X)|a|\sigma(X)} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & \text{αν } a > 0 \\ -1 & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

$$\sigma(aX+b) = \sigma(aX) = |a|\,\sigma(X)$$

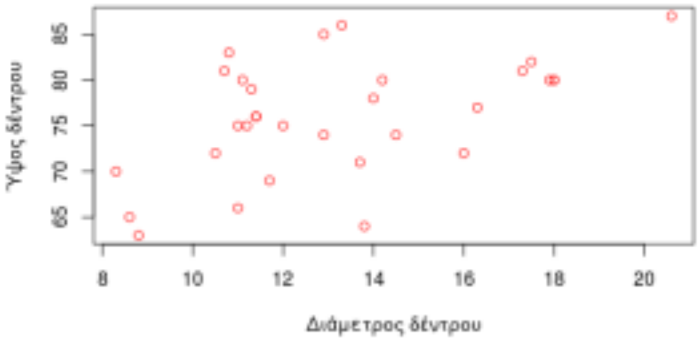
$$\sqrt{\sigma^2(aX)} = \sqrt{a^2\sigma^2(X)}$$

Διάγραμμα διασποράς (scatter plot) για δύο ΤΜ

Αν X, Y δύο ΤΜ στο ίδιο πείραμα, παίρνουμε πολλά δείγματα

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$$

και τα αποτυπώνουμε στο x, y επίπεδο.

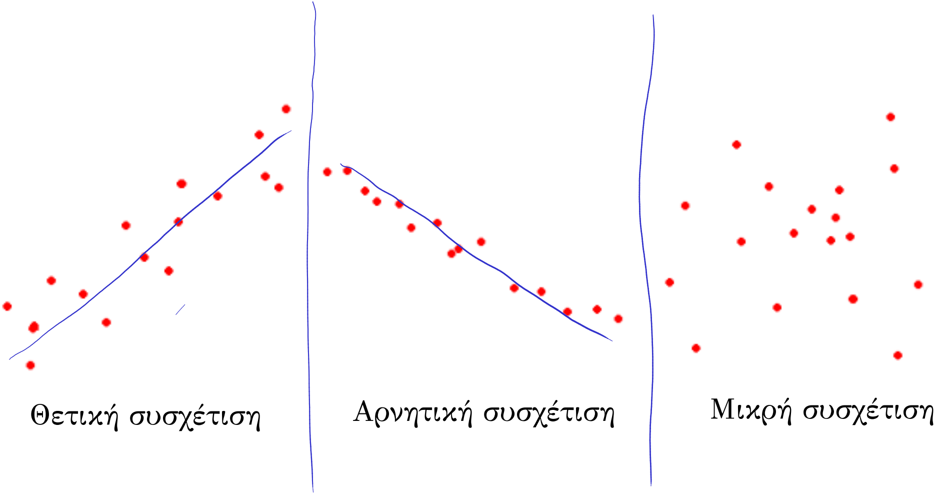


Π.χ. διαλέγουμε τυχαίο δέντρο μέσα σε ένα δάσος και

X=διάμετρος κορμού,

Y=ύψος δέντρου

Διάγραμμα διασποράς και συσχέτιση

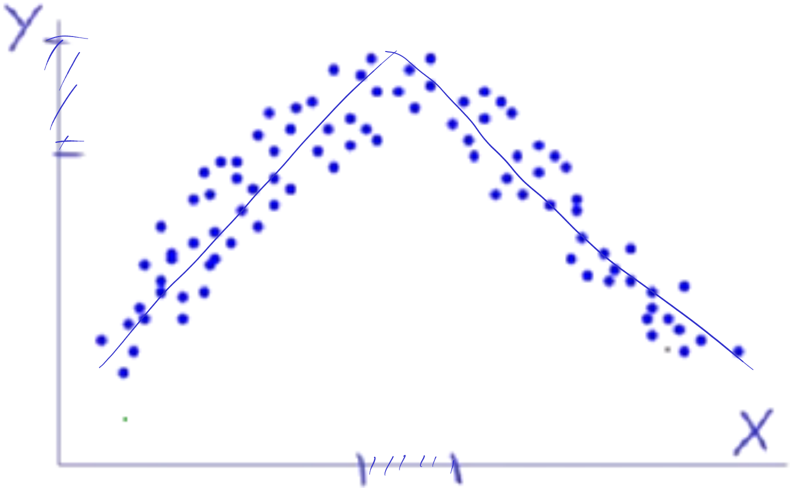


Θετική συσχέτιση

Αρνητική συσχέτιση

Μικρή συσχέτιση

X, Y ασυσχέτιστες αλλά όχι ανεξάρτητες



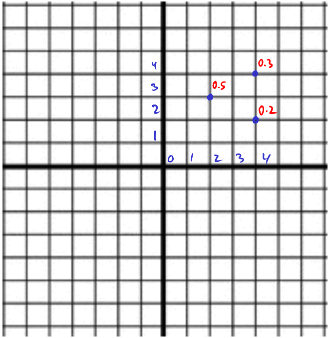
Κοινή πυκνότητα δύο διακριτών ΤΜ

X, Y ΤΜ με ακέραιες τιμές.

Περιθώριες πυκνότητες $f_X(n) = \mathbb{P}[X = n]$, $f_Y(n) = \mathbb{P}[Y = n]$.

marginal

Κοινή πυκνότητα $f(m, n) = f_{X,Y}(m, n) = \mathbb{P}[X = m, Y = n]$.



$f(2,3)$

$=$

$\mathbb{P}(X=2, Y=3) = 0.5$

$f(4,2) = 0.2$

$f(4,4) = 0.3$

Κοινή πυκνότητα καθορίζει τις περιθώριες

$f_{X,Y}(m,n)$

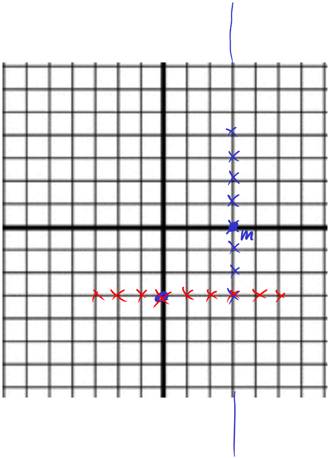
$$f_X(m) = \mathbb{P}[X = m] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}[X = m, Y = n] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{X,Y}(m,n)$$

$$f_Y(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{X,Y}(m,n)$$

ξενη ενωση

$$\{X=m\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}^{\cdot} \{X=m, Y=n\}$$

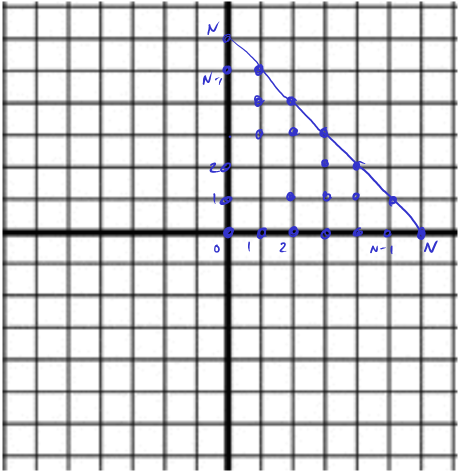
$$\mathbb{P}(X=m) = \sum_{n} \mathbb{P}(X=m, Y=n)$$



Παράδειγμα υπολογισμού περιθωρίων

$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(X,Y) ομοιόμορφα κατανεμημένη στο τρίγωνο $(0,0)-(N,0)-(0,N)$.



M = πλήθος των σημείων

$M = 1+2+3+\dots+(N+1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$ $\quad p = \frac{2}{(N+1)(N+2)}$

$f_X(m)$

$f_X(N) = p$

$f_X(N-1) = 2p$

$f_X(N-2) = 3p$

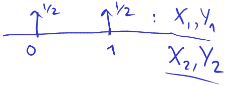
$\vdots$

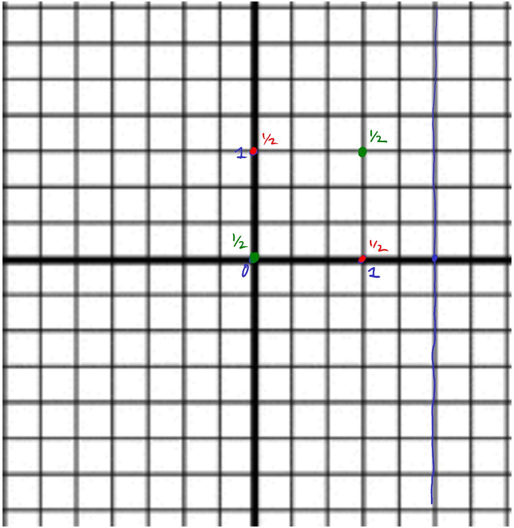
$f_X(0) = (N+1)p$

$$f_X(N-i) = (i+1)p = \frac{2(i+1)}{(N+1)(N+2)}$$

$0 \le i \le N$

Οι περιθώριες δεν καθορίζουν την κοινή πυκνότητα





Ρίχνουμε δύο τίμια νομίσματα A, B.

Ζεύγος (X_1, Y_1):
$X_1 = Y_1 = \,:(A = B)$

$(X_1, Y_1) = (0,0)$
$= (1,1)$

Ζεύγος (X_2, Y_2):
$X_2 = \,:(A \neq B)\,,\, Y_2 = 1 - X_2$

$(X_2, Y_2) = (0,1)$
$= (1,0)$

Τότε $f_{X_1} \equiv f_{X_2}$, $f_{Y_1} \equiv f_{Y_2}$ αλλά οι

$$f_{X_1,Y_1},\ f_{X_2,Y_2}$$

είναι διαφορετικές.

Κοινή πυκνότητα δύο ανεξαρτήτων ΤΜ

A B

Αν X, Y ανεξάρτητες τότε

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(m,n) &= \mathbb{P}\left[X=m, Y=n\right] \\
&= \mathbb{P}\left[X=m\right]\mathbb{P}\left[Y=n\right] \\
&= f_X(m)\cdot f_Y(n).
\end{aligned}$$

Χωρισμός μεταβλητών: $f_{X,Y}(m,n) = f_X(m)f_Y(n)$
(αν και μόνο αν X, Y ανεξάρτητες)

Ανεξαρτησία $\implies$ οι περιθώριες καθορίζουν την κοινή πυκνότητα.

Χωρισμός μεταβλητών $\Longrightarrow$ ανεξαρτησία

$f_{X,Y}(m,n) = f_X(m)\, f_Y(n)$

A, B ενδεχόμενα που εξαρτώνται μόνο από την X και Y αντίστοιχα.
Αυτό σημαίνει ότι: $A = \left\{X \in \tilde{A}\right\}$, $B = \left\{Y \in \tilde{B}\right\}$ για κάποια σύνολα $\tilde{A}, \tilde{B}$.

Πρέπει να δείξουμε $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$.

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{a \in \tilde{A}} f_X(a), \quad \mathbb{P}[B] = \sum_{b \in \tilde{B}} f_Y(b)$$

$$\mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] = \left(\sum_{a \in \tilde{A}} f_X(a)\right) \cdot \left(\sum_{b \in \tilde{B}} f_Y(b)\right) = \boxed{\sum_{a \in \tilde{A},\ b \in \tilde{B}} f_X(a) f_Y(b).}$$

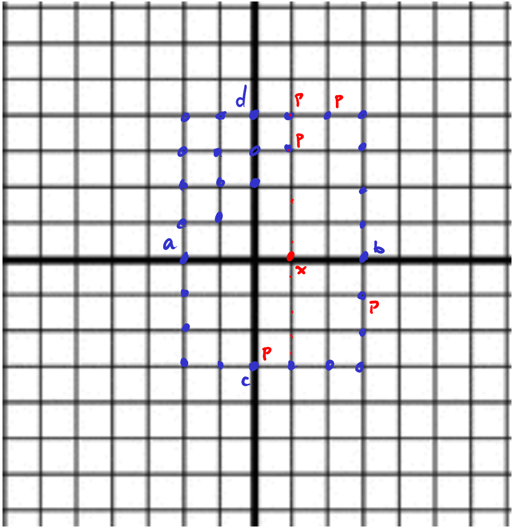
$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}\left[(X, Y) \in \tilde{A} \times \tilde{B}\right] = \sum_{(a,b) \in \tilde{A} \times \tilde{B}} f_{X,Y}(a, b)$$

$(a,\ b)$

$$= \boxed{\sum_{a \in \tilde{A},\ b \in \tilde{B}} f_X(a) f_Y(b)} \quad \text{(λόγω χωρισμού μεταβλητών)}$$

$$= \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B].$$

Παράδειγμα κοινής πυκνότητας ανεξαρτήτων



Παίρνουμε (X, Y) ομοιόμορφη στο «ορθογώνιο» $\underbrace{\{a, \dots, b\}}_{b-a+1} \times \underbrace{\{c, \dots, d\}}_{d-c+1}$.

$(b-a+1)\cdot(d-c+1)$

$$p = 1/(b-a+1)(d-c+1)$$

$$f_X(x) = p\cdot(d-c+1) = \frac{1}{b-a+1}$$

X ομοιόμορφη στο $\{a, \dots, b\}$

$$f_Y(y) = p\,(b-a+1) = \frac{1}{d-c+1}$$

Y ομοιόμ. στο $\{c, \dots, d\}$