# Η ανισότητα του Markov

Andrei Markov
(1856-1922)

Αν $X$ ΤΜ τ.ώ. $X \ge 0$ και με πεπερασμένη μέση τιμή $\mathbb{E}[X]$ και $t > 0$ τότε

$$\mathbb{P}[X \ge \overbrace{\underbrace{t\mathbb{E}[X]}_{s}}^{t\mu}] \le \frac{1}{t}.$$

Ισοδύναμα

$$\mathbb{P}[X \ge s] \le \frac{\mathbb{E}[X]}{s}.$$

$X \equiv 0$

$$\mu = \mathbb{E}X = \sum_{x} x\,\mathbb{P}(X=x) = \sum_{x \ge t\mu} + \cancel{\sum_{x < t\mu}} \ge \sum_{x \ge t\mu} x\,\mathbb{P}(X=x) \ge \sum_{x \ge t\mu} t\mu\,\mathbb{P}(X=x)$$

$$= t\mu \underbrace{\sum_{x \ge t\mu} \mathbb{P}(X=x)}_{\mathbb{P}(X \ge t\mu)} \Longrightarrow \cancel{\mu} \ge t\cancel{\mu}\,\mathbb{P}(X \ge t\mu) \Rightarrow \mathbb{P}(X \ge t\mu) \le \frac{1}{t}$$

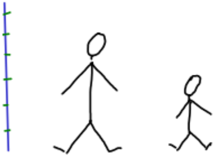
# Η ανισότητα του Markov: εφαρμογή

20.11.04

**Σχεδόν τρία εκατοστά ψήλωσαν οι Έλληνες τα τελευταία 20 χρόνια**

Απόσπασμα:

Το μέσο ύψος της νέας γενιάς στην Ελλάδα έχει αυξηθεί στο 1,78 για τους άνδρες και στο 1,66 για τις γυναίκες. Αυτό σημαίνει ότι οι σημερινοί εικοσάρηδες είναι τρία εκατοστά ψηλότεροι από τους σαραντάρηδες και τέσσερα εκατοστά ψηλότεροι από τους πενηντάρηδες, ενώ οι εικοσάχρονες σήμερα είναι δύο εκατοστά ψηλότερες από τις σαραντάχρονες και τρία εκατοστά ψηλότερες σε σχέση με τις πενηντάχρονες.



Το πολύ ποια είναι η πιθανότητα ο τυχαίος άνδρας να είναι τουλάχιστον 1.90m;

$$\mathbb{P}[X \geq 1.90] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{1.90} = \frac{1.78}{1.90} = 0.9368 \text{ (πολύ ασθενές φράγμα).}$$

# Πιο ρεαλιστικές υποθέσεις, καλύτερα αποτελέσματα

$X$, $\mathbb{E}X = 1.78$

$\mathbb{P}(X \geq 1.9) \leq 0.93$

$\leq 0.70$

Ας υποθέσουμε ότι όλοι οι άνδρες έχουν ύψος $\geq 1.50$ m.

Υπόθεση

Τότε, αν $t = 1.90$ και $p = \mathbb{P}[X \geq t]$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega) \\
&= \sum_{\omega : X(\omega) \geq t} X(\omega) p(\omega) + \sum_{\omega : X(\omega) < t} \overbrace{X(\omega)}^{\geq 1.50} p(\omega) \\
&\geq t \cdot \mathbb{P}[X \geq t] + 1.50 \cdot \mathbb{P}[X < t] \\
&= tp + 1.50(1-p)
\end{aligned}
$$

άρα

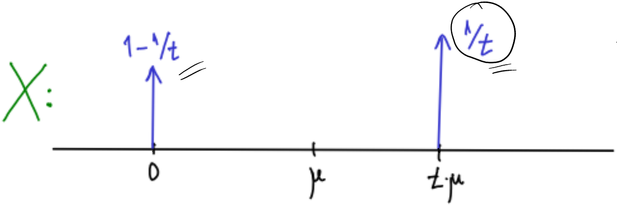
$$\mathbb{E}[X] \geq (t - 1.50)p + 1.50$$

και λύνοντας ως προς $p$ παίρνουμε $p \leq \dfrac{\mathbb{E}[X] - 1.50}{t - 1.50} = \dfrac{1.78 - 1.50}{1.90 - 1.50} = \dfrac{0.28}{0.40} = 0.70.$

# Γιατί δε βελτιώνεται η ανισότητα του Markov

Με μόνες υποθέσεις ότι $X \geq 0$ και ότι γνωρίζουμε τη μέση τιμή $\mu = \mathbb{E}[X]$ η ανισότητα του Markov δε μπορεί να βελτιωθεί.

$$\mathbb{P}(X \geq t\mu) \leq \frac{1}{t}$$




$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right) + t\mu\frac{1}{t} = \mu$$

και

$\mathbb{P}[X \geq t\mu] = \dfrac{1}{t}$ άρα η ανισότητα Markov ισχύει ως ισότητα.

# Γενικευμένη ανισότητα Markov

συνεχής

Ας είναι $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ μια αύξουσα συνάρτηση.

Από την ανισότητα Markov για την ΤΜ $g(X)$ παίρνουμε

υπάρχει

$$\mathbb{P}[X \geq t] = \mathbb{P}[g(X) \geq g(t)] \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(t)} \qquad \mathbb{E}\, g(X) < \infty$$

Σύγκριση: $\begin{cases} \mathbb{P}[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t} & \text{(απλή Markov)} \\ \\ \mathbb{P}[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(t)} & \text{(γενικευμένη Markov)} \end{cases}$

Για $t \to +\infty$ η γενικευμένη Markov μπορεί να είναι πολύ καλύτερη.

Π.χ. αν $g(x) = x^2$ τότε παίρνουμε $\mathbb{P}[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{t^2}$.

Πρέπει όμως να υπάρχει ο μέσος όρος $\mathbb{E}[g(X)]$.

# Γενικευμένη ανισότητα Markov: παράδειγμα χρήσης

ισχυρή υπόθεση

Αν γνωρίζουμε ότι $\boxed{\mathbb{E}\left[e^X\right] < \infty}$ τότε

$$\underline{\mathbb{P}\left[X \geq t\right]} \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^X\right]}{e^t}$$

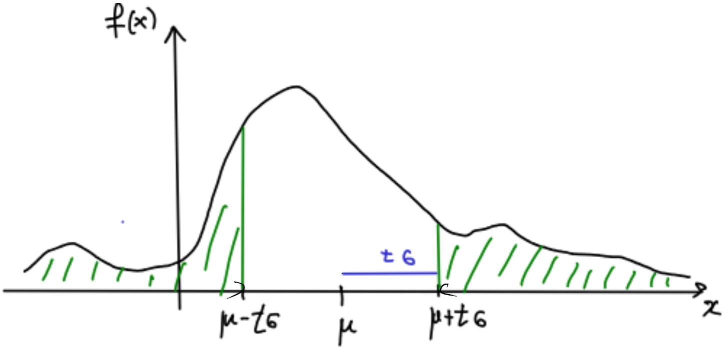
$$X = \underbrace{X_1 + \cdots + X_n}_{\text{ανεξ.}}$$

# Η ανισότητα του Chebyshev

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty \implies \mathbb{E}\left[|X|\right] < \infty \implies \mu = \mathbb{E}\left[X\right] \text{ υπάρχει.}$$

Αν λοιπόν $\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$ τότε η διασπορά
$\sigma^2(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2$ υπάρχει.


Pafnuty Chebyshev (1821-1894)




Ανισότητα Chebyshev:

$$\mathbb{P}\left[|X - \mu| > t\sigma\right] \leq \frac{1}{t^2}.$$

# Η ανισότητα του Chebyshev: απόδειξη

$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\left(\left(X-\mu\right)^2\right) = \sigma^2(X)$

$$\mathbb{P}\left[|X-\mu| \geq t\sigma\right] = \mathbb{P}\left[\overbrace{(X-\mu)^2}^{Y} \geq t^2\sigma^2\right]$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Markov στην ΤΜ

$$Y = (X-\mu)^2$$

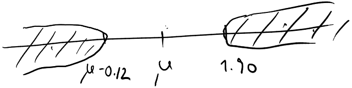
με $\mathbb{E}\left[Y\right] = \sigma^2(X)$.

Παίρνουμε

$$\mathbb{P}\left[|X-\mu| \geq t\sigma\right] = \mathbb{P}\left[Y \geq t^2\mathbb{E}\left[Y\right]\right] \leq \frac{1}{t^2}.$$

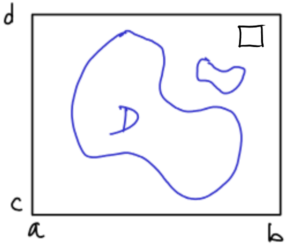
# Η ανισότητα του Chebyshev: εφαρμογή στο ύψος ατόμου

Επιπλέον υπόθεση: $\sigma(X) = 0.05\text{m}$ (επιπλέον του ότι $\mu = \mathbb{E}[X] = 1.78\text{m}$).




$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X \geq 1.90] &= \mathbb{P}[X - \mu \geq 0.12] \\
&\leq \mathbb{P}[|X - \mu| \geq 0.12] \\
&\leq \frac{\sigma^2}{0.12^2} \qquad \text{(από ανισότητα Chebyshev)} \\
&= \frac{0.05^2}{0.12^2} \\
&= 0.1736
\end{aligned}
$$

# Η μέθοδος Monte Carlo




Ζητούμενο: το εμβαδό του χωρίου $D \subseteq [a,b] \times [c,d]$.

Τι ξέρουμε: υπολογίσιμη συνάρτηση $f(x,y)$ τ.ώ.

$$(x,y) \in D \Longleftrightarrow f(x,y) = 1.$$

Τι διαθέτουμε: ΤΜ $X, Y$ ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[a,b]$ και $[c,d]$.

$(X, Y)$

Παράγουμε ανεξάρτητα αντίγραφα: $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_N, Y_N)$.

Εκτιμούμε:

$$\frac{\text{Εμβαδό}(D)}{(b-a)\cdot(d-c)} = \mathbb{P}\left[(X,Y) \in D\right] \sim \frac{\text{πόσα από τα } (X_j, Y_j) \text{ είναι στο } D}{N}$$

# Monte Carlo: Ανάλυση ποιότητας

$$S = (\text{πλήθος των } (X_j, Y_j) \text{ στο } D) = I_1 + I_2 + \cdots + I_N \text{ με } I_j = \,:((X_j, Y_j) \in D).$$

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[I_1] + \cdots + \mathbb{E}[I_N] = N\mathbb{E}[I_1] = N\mathbb{P}[(X_1, Y_1) \in D] = N\frac{\text{Εμβαδό}(D)}{(b-a)\cdot(d-c)}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{S}{N}\right] = \frac{\text{Εμβαδό}(D)}{(b-a)\cdot(d-c)} =: p = \mathbb{P}\left((X_1, Y_1) \in D\right)$$

$$\sigma^2(S) = \sigma^2(I_1) + \cdots + \sigma^2(I_N) = N\sigma^2(I_1) = Np(1-p)$$

$$\sigma^2\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{1}{N^2}\sigma^2(S) = \frac{p(1-p)}{N} \text{ και } \sigma\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}}$$

# Monte Carlo: Ανάλυση ποιότητας

Εκτιμούμε την ποσότητα $p = \mathbb{E}[S/N]$ μέσω της $S/N$.

Ανισ. Chebyshev:

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S}{N} - p\right| \geq \epsilon\right] = \frac{\sigma^2(S/N)}{\epsilon^2} = \frac{\overbrace{p(1-p)}^{\leq 1}}{N\epsilon^2} \leq \frac{1}{4\epsilon^2 N}.$$

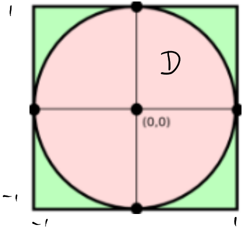
Προδιαγραφές που θέτουμε: $\begin{cases} \text{Ποιότητα προσέγγισης } \epsilon \\ \text{Πιθανότητα αποτυχίας } \alpha \end{cases}$

Ζητάμε δηλ. $\dfrac{1}{4N\epsilon^2} \leq \alpha.$

Επιλέγουμε το $N$ έτσι ώστε να ισχύει η ανισότητα αυτή $\boxed{N \geq \dfrac{1}{4\epsilon^2\alpha}.}$

# Monte Carlo: προσεγγιστικός υπολογισμός του αριθμού π

Αν $D$ ο μοναδιαίος δίσκος στο τετράγωνο $[-1,1]\times[-1,1]$ τότε Εμβαδό$(D)=\pi$.




Ρίχνουμε $N$ τυχαία σημεία στο $[-1,1]\times[-1,1]$.

$S=$ πόσα πέσαν μέσα (ελέγχουμε αν $X^2+Y^2\le 1$)

$S = I_1 + I_2 + \dots + I_N$

Το $S/N$ είναι προσέγγιση του $\pi/4$.

**Ανάλυση:**

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S}{N}-\frac{\pi}{4}\right| \ge \overbrace{0.01}^{\epsilon}\right] \le \frac{1}{\underbrace{4\cdot 10^{-4}}_{\epsilon^2} N} \le \alpha$$

Αν θέλουμε πιθαν. αποτυχίας $\overbrace{\le 0.001}^{\alpha}$ τότε παίρνουμε

$$N \ge \frac{1}{4\cdot 10^{-4}10^{-3}} = \frac{10^7}{4} = 2.5\times 10^6.$$

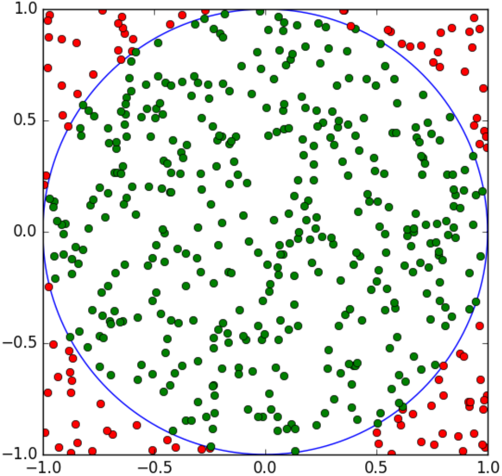
Πολύ απαισιόδοξη εκτίμηση ...

# Monte Carlo: υλοποίηση

```
N = 500 # Πόσα τυχαία σημεία ρίχνουμε στο τετράγωνο [-1, 1] x [-1, 1]

incircle = 0 # Εδώ μετράμε το πόσα πέσαν μέσα στο μοναδιαίο κύκλο

for i in range(N):
    x = random.uniform(-1, 1); y = random.uniform(-1, 1) # τυχαία x, y
    dist2 = x**2+y**2 # τετράγωνο της απόστασης από το 0
    if dist2 <= 1: # είναι το σημείο μέσα στον κύκλο
        incircle += 1 # αυξάνουμε το μετρητή

pe = 4*incircle/N # αυτή είναι η εκτίμησή μας για το π

print("Εκτίμηση για το π με {} σημεία: {}".format(N, pe))
```

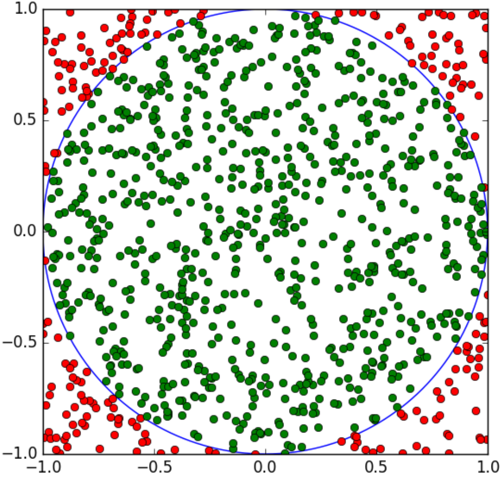
# Monte Carlo: πειράματα

Εκτίμηση για το π με 500 σημεία: 3.176



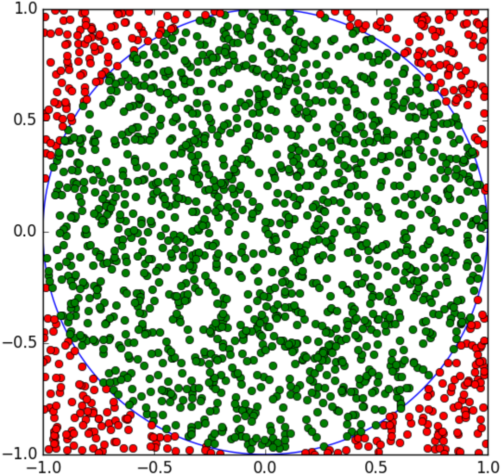
# Monte Carlo: πειράματα

Εκτίμηση για το π με 1000 σημεία: 3.152



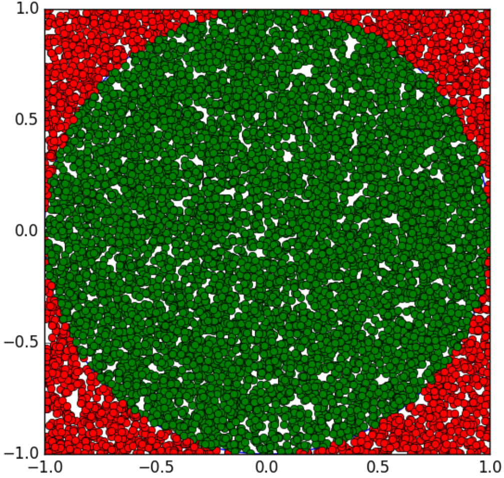
# Monte Carlo: πειράματα

Εκτίμηση για το π με 2000 σημεία: 3.148



# Monte Carlo: πειράματα

Εκτίμηση για το π με 10000 σημεία: 3.1656



# Ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών

$$\text{Οι ΤΜ } X_1, X_2, \ldots\text{:} \begin{cases} \text{είναι ανά δύο ανεξάρτητες} \\ \text{έχουν ίδια μέση τιμή } \mu \text{ και διασπορά } \sigma^2 \end{cases}$$

Αν $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ και $\epsilon > 0$ τότε $\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right] \to 0$, για $n \to \infty$.

**Ερμηνεία:**
Αν $X_1, X_2, \ldots$ είναι π.χ. ανεξάρτητες παρατηρήσεις της ίδιας ΤΜ $X$ τότε

*με μεγάλη πιθανότητα*

ο μέσος όρος που παρατηρούμε είναι πολύ κοντά στην πραγματική μέση τιμή.

# Ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών: απόδειξη

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \mu \quad \text{και} \quad \sigma^2(S_n) = \sigma^2(X_1) + \cdots + \sigma^2(X_n) = n\sigma^2, \text{ άρα}$$

$$\sigma^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}. \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Από ανισότητα Chebyshev για την ΤΜ $S_n/n$:

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2(S_n/n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to 0 \quad (\text{για } n \to \infty).$$