Λύσεις των ασκήσεων

1. Η ΤΜ X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 1 (δηλ. $f_X(x) = \mathbb{1}(x \ge 0)\, e^{-x}$) και η ΤΜ S παίρνει τις τιμές ± 1 με ίση πιθανότητα 1/2. Οι X και S είναι ανεξάρτητες. Βρείτε τη συνάρτηση κατανομής, την πυκνότητα, τη μέση τιμή και τη διασπορά της $Z = SX$.

Λύση: Ας βρούμε πρώτα τη συνάρτηση κατανομής της Z. Αν $t < 0$ τότε

$$\mathbb{P}[Z \le t] = \mathbb{P}[S = -1,\ X \ge -t] = \mathbb{P}[S = -1](1 - \mathbb{P}[X < -t]) = \frac{1}{2}\int_{-t}^{\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}e^{t},$$

ενώ αν $t \ge 0$ έχουμε αντίστοιχα

$$\mathbb{P}[Z \le t] = \mathbb{P}[S = -1] + \mathbb{P}[S = 1,\ X \le t] = \frac{1}{2} + \mathbb{P}[S = 1]\mathbb{P}[X \le t] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-x}\,dx = 1 - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Παραγωγίζοντας για $t < 0$ βρίσκουμε την πυκνότητα $f_Z(t) = (\frac{1}{2}e^t)' = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{-|t|}$ ενώ για $t \ge 0$ παίρνουμε $f_Z(t) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t})' = \frac{1}{2}e^{-t} = \frac{1}{2}e^{-|t|}$.

Και στις δύο περιπτώσεις λοιπόν ισχύει $f_Z(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$.

Λόγω συμμετρίας η μέση τιμή της Z είναι προφανώς το 0. Η διασπορά της είναι συνεπώς η ποσότητα

$$\mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathbb{E}\left[S^2X^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] = \sigma^2(X) + \mathbb{E}[X]^2 = 1 + 1 = 2.$$

2. Έστω X και Y δύο ΤΜ. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι *δεύτερες ροπές* $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ και $\mathbb{E}\left[Y^2\right]$ (το οποίο συνεπάγεται ότι υπάρχουν και οι πρώτες ροπές $\mathbb{E}[X]$ και $\mathbb{E}[Y]$). Ας είναι S μια ΤΜ που παίρνει τις τιμές 0 και 1 με πιθανότητες $1-p$ και p αντίστοιχα και η οποία είναι ανεξάρτητη και από την X και από την Y. Ορίζουμε την ΤΜ Z ως εξής:

$$Z = \begin{cases} X & \text{αν } S = 0 \\ Y & \text{αν } S = 1. \end{cases}$$

Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της Z μέσω των ποσοτήτων $p, \mathbb{E}[X], \mathbb{E}\left[X^2\right], \mathbb{E}[Y], \mathbb{E}\left[Y^2\right]$.

Λύση: Έχουμε $Z = (1-S)X + SY$ οπότε $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[1-S]\,\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[S]\,\mathbb{E}[Y]$ από την ανεξαρτησία της S με την X και με την Y. Άρα $\mathbb{E}[Z] = (1-p)\mathbb{E}[X] + p\mathbb{E}[Y]$. Έχουμε επίσης

$$\mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathbb{E}\left[(1-S)^2X^2 + S^2Y^2 + 2S(1-S)XY\right] = \mathbb{E}\left[(1-S)X^2 + SY^2\right]$$

αφού η S παίρνει τιμές 0 ή 1 μόνο και άρα $S^2 = S, (1-S)^2 = 1-S, S(1-S) = 0$. Συνεχίζοντας έχουμε

$$\mathbb{E}\left[Z^2\right] = (1-p)\mathbb{E}\left[X^2\right] + p\mathbb{E}\left[Y^2\right].$$

Αφαιρώντας το $\mathbb{E}[Z]^2$ παίρνουμε

$$\sigma^2(Z) = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 = (1-p)\mathbb{E}\left[X^2\right] + p\mathbb{E}\left[Y^2\right] - (1-p)^2\mathbb{E}[X]^2 - p^2\mathbb{E}[Y]^2 - 2p(1-p)\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

3. Ας είναι X μια ΤΜ ομοιόμορφα κατενεμημένη στο σύνολο

$$\{1, 2, \ldots, n\}.$$

Ποια η μέση τιμή της και ποια η διασπορά της; Ποιες η αντίστοιχες τιμές αν η ΤΜ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $\{a, a+1, \ldots, b\}$.

Λύση: Για λόγους συμμετρίας έχουμε προφανώς $\mathbb{E}[X] = \frac{1+n}{2}$. Για τη διασπορά έχουμε

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

οπότε

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

Μια ΤΜ Y που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $\{a, a+1, \ldots, b\}$ ισούται με $a - 1 + X$ με τη X να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $\{1, 2, \ldots, b-a+1\}$. Η μέση τιμή μεταφέρεται κι αυτή αλλά η διασπορά της X και της Y είναι ίδιες, οπότε έχουμε

$$\mathbb{E}[Y] = a - 1 + \frac{b-a+2}{2}, \quad \sigma^2(Y) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}.$$

4. Έχουμε ένα συνηθισμένο ζάρι κι ένα οκταεδρικό ζάρι, ένα ζάρι δηλ. που οι 8 έδρες του αντιστοιχούν στους αριθμούς 1 έως 8 οι οποίοι εμφανίζονται με ίση πιθανότητα όταν ρίχνουμε το ζάρι.

Ρίχνουμε ένα τίμιο νόμισμα. Αν το νόμισμα έρθει κορώνα ρίχνουμε το συνηθισμένο ζάρι, αλλιώς ρίχνουμε το οκταεδρικό ζάρι. Το κέρδος μας είναι το αποτέλεσμα του (όποιου) ζαριού σε ευρώ. Ποιο το μέσο κέρδος μας και ποια η τυπική του απόκλιση;

Λύση: Αυτό είναι ειδική περίπτωση του Προβλήματος 2 όπου χρησιμοποιούνται οι τύποι που βρήκαμε στο Πρόβλημα 3. Πράγματι αν πάρουμε $p = 1/2$ και πούμε $S = 0$ αν το νόμισμα έρθει κορώνα και $S = 1$ αν έρθει γράμματα, και πούμε επίσης X το αποτέλεσμα του εξαεδρικού ζαριού και Y το αποτέλεσμα του οκταεδρικού ζαριού τότε είναι ακριβώς όπως στο Πρόβλημα 2.

5. Έχουμε ένα νόμισμα που έρχεται κορώνα με πιθανότητα p, την οποία δε γνωρίζουμε. Γνωρίζουμε όμως ότι το p είναι πολλαπλάσιο του 0.1. Ρίχνουμε το νόμισμα 7 φορές και παίρνουμε τα αποτελέσματα ΚΓΚΓΚΚΚ. Σκοπός μας είναι να κάνουμε μια εκτίμηση για την ποσότητα p. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να έχουμε ένα μετρήσιμο τρόπο να υπολογίζουμε πόσο καλή είναι η εκτίμησή μας. Το κριτήριό μας είναι η ποσότητα (συνάρτηση του p)

$$L(p) = \mathbb{P}\left[\text{αποτέλεσμα 7 ρίψεων είναι ΚΓΚΓΚΚΚ}\right].$$

Η ποσότητα αυτή ονομάζεται *πιθανοφάνεια* (likelihood) του p και είναι προφανώς συνάρτηση του p και του αποτελέσματος που παρατηρήσαμε. Το $L(p)$ μας λέει πόσο πιθανό είναι το αποτέλεσμα που είδαμε αν η άγνωστη παράμετρος είναι η p.

Σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα $L(p)$ επιλέγοντας το κατάλληλο p (υπό τον περιορισμό ότι πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 0.1).

Υπολογίστε την ποσότητα $L(p)$ για το δεδομένο αποτέλεσμα και βρείτε ποια είναι η τιμή του p που τη μεγιστοποιεί. Θα δείτε ότι αυτή η τιμή δεν είναι πολλαπλάσιο του 0.1 (όπως απαιτεί το πρόβλημα) οπότε θα πρέπει να ελέγξετε με άλλο τρόπο (π.χ. με ένα απλό υπολογισμό) το ποια από τις επιτρεπτές τιμές μεγιστοποιεί το $L(p)$.

Λύση: Αφού έχουμε 5 κορώνες και 2 γράμματα στο αποτέλεσμα ΚΓΚΓΚΚΚ έχουμε τότε ότι $L(p) = p^5(1-p)^2$. Αν παραγωγίσουμε ως προς p παίρνουμε

$$L'(p) = p^4(1-p)(5-7p),$$

άρα η $L(p)$ είναι αύξουσα έως το $p = 5/7$ και φθίνουσα μετά, άρα το μέγιστο το παίρνει στο $p = 5/7$ που όμως δεν είναι πολλαπλάσιο του 0.1, και άρα δε μπορούμε να επιλέξουμε την τιμή αυτή ως p. Αρκεί όμως να ελέγξουμε τα δύο πολλαπλάσια του 0.1 που είναι δεξιά κι αριστερά του 5/7=0.714, δηλ. τα $p_1 = 0.7$ και $p_2 = 0.8$. Υπολογίζουμε $L(0.7) = 0.015$ και $L(0.8) = 0.013$ άρα η τιμή που επιλέγουμε είναι η $p_1 = 0.7$.

6. Έχετε μπροστά σας ένα τσουβάλι με λαχνούς, αριθμημένους από το 1 έως το N, το οποίο δε γνωρίζετε και θέλετε να το εκτιμήσετε. Βάζετε το χέρι σας στο τσουβάλι, τραβάτε ένα λαχνό, καταγράφετε τον αριθμό του και τον επιστρέφετε. Το επαναλαμβάνετε αυτό 5 φορές και οι αριθμοί που βλέπετε είναι οι

$$10, 15, 11, 14, 15.$$

Σκοπός σας είναι να επιλέξετε ως (εκτίμησή σας για την) τιμή του N εκείνο τον αριθμό που μεγιστοποιεί την πιθανότητα του να βγει αυτό το δείγμα αριθμών που βλέπετε. (Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα αυτό λέγεται εκτίμηση *μέγιστης πιθανοφάνειας*.)

Ποια πρέπει να είναι η επιλογή σας για το N;

Λύση: Η πιθανότητα να προκύψει ένας οποιοσδήποτε συγκεκριμένος αριθμός από ένα τσουβάλι με τους αριθμούς 1 έως N είναι $1/N$, άρα η πιθανότητα να προκύψει η συγκεκριμένη παρατήρηση είναι $L(N) := \frac{1}{N^5}$ και αυτή μεγιστοποιείται προφανώς για τη μικρότερη δυνατή τιμή του N που είναι συμβατή με την παρατήρηση, άρα για $N = 15$. Αυτή είναι και η εκτίμηση (μέγιστης πιθανοφάνειας) για το N που δίνουμε.

7. Συζητείστε το παρακάτω πρόβλημα:

> Στα χέρια μου έχω ένα ποσό και το διπλάσιό του. Δεν ξέρετε ποιο είναι αυτό το ποσό.
>
> Επιλέγετε στην τύχη ένα από τα δύο μου χέρια, το ανοίγω και βλέπετε ένα ποσό, ας πούμε 1 ευρώ. Και σας δίνω τη δυνατότητα να πάρετε το 1 ευρώ ή να πάρετε αυτό που είναι στο άλλο χέρι (πριν σας το ανοίξω φυσικά).

Τι θα κάνετε;

Ιδού μια προσέγγιση:

«Ας ονομάσουμε X το ποσό που παίρνουμε τελικά παίζοντας το παιχνίδι αυτό. Σκοπός μας είναι φυσικά να μεγιστοποιήσουμε το μέσο κέρδος, την ποσότητα δηλ. $\mathbb{E}[X]$. Η μια επιλογή του πώς παίζουμε είναι να πάρουμε το ένα ευρώ, οπότε το κέδρος μας είναι 1 ευρώ. Αν όμως επιλέξουμε το άλλο χέρι, όπως μας δίνεται το δικαίωμα να κάνουμε, τότε το άλλο χέρι θα έχει μισό ευρώ με πιθανότητα 1/2 και 2 ευρώ με πιθανότητα πάλι 1/2. Οπότε θα έχουμε $\mathbb{P}[X = 0.5] = \mathbb{P}[X = 2] = 1/2$ και άρα $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}2 = 1.25$, άρα μεγαλύτερο του 1, οπότε μας συμφέρει να αλλάξουμε χέρι.»

Τι λέτε;

Λύση: Το επιχείρημα που δίνεται στο τέλος της άσκησης είναι λανθασμένο. Στην πραγματικότητα όταν ανοίγει το χέρι που δείξαμε δε μας δίνεται ουσιαστικά καμιά πληροφορία για το σε ποιο χέρι είναι το μεγάλο ποσό και σε ποιο το μικρό (μπορείτε, με άλλα λόγια, να ξαναγράψετε το παραπάνω επιχείρημα και στη θέση του 1 ευρώ να βάλετε όποιο ποσό θέλετε και το συμπέρασμα θα είναι το ίδιο, ότι πρέπει να αλλάξετε. Αυτό δε μπορεί να ισχύει.

Και τι ακριβώς είναι λάθος στον υπολογισμό αυτό;

Το λάθος είναι ότι στο δεύτερο (κλειστό) χέρι δεν υπάρχει μισό ευρώ με πιθανότητα 1/2 και 2 ευρώ με πιθανότητα 1/2. Το ποσό στο δεύτερο χέρι μας είναι άγνωστο αλλά δεν είναι τυχαίο. Το μόνο τυχαίο στην όλη διαδικασία είναι το ποιο χέρι δείχνουμε, όχι το ποσό (και το διπλάσιό του) που βρίσκεται στα χέρια μας.