Πιθανοτητες – Άνοιξη 2020-21

Λύσεις των ασκήσεων

1. Ρίχνουμε δύο ζάρια και έστω X το αποτέλεσμα του πρώτου και Y του δεύτερου. Ορίζουμε επίσης τις δύο ΤΜ

$$Z = \min\{X, Y\} \text{ και } W = \max\{X, Y\}.$$

Βρείτε τις ποσότητες $\mathbb{E}[Z]$ και $\mathbb{E}[W]$.

Λύση: Πρώτα βρίσκουμε τη συνάρτηση κατανομής της W. Έχουμε για $i = 1, 2, \ldots, 6$,

$$\begin{aligned} F_W(i) &= \mathbb{P}[W \le i] \\ &= \mathbb{P}[X \le i,\ Y \le i] \\ &= \mathbb{P}[X \le i]\mathbb{P}[Y \le i] \\ &= \frac{i}{6} \cdot \frac{i}{6} \\ &= \frac{i^2}{36} \ \text{ (και αυτό ισχύει και για } i = 0). \end{aligned}$$

Άρα, για $i = 1, 2, \ldots, 6$,

$$\begin{aligned} f_W(i) &= F_W(i) - F_W(i-1) \\ &= \frac{i^2}{36} - \frac{(i-1)^2}{36} \\ &= \frac{2i-1}{36}. \end{aligned}$$

Τέλος (και χρησιμοποιώντας τον τύπο $\sum_{i=1}^N i^2 = N(N+1)(2N+1)/6$) έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W] &= \sum_{i=1}^{6} i f_W(i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} \frac{i(2i-1)}{36} \\ &= \sum_{i=1}^{6} \frac{i^2}{18} - \sum_{i=1}^{6} \frac{i}{36} \\ &= \frac{7 \cdot 23}{36} \ \text{ (μετά από πράξεις)} \\ &= 4.472 \end{aligned}$$

Για τη μέση τιμή της Z δε χρειάζεται να επαναλάβουμε μια παρόμοια διαδικασία γιατί μπορούμε να στηριχτούμε στην παρατήρηση

$$X + Y = Z + W,$$

οπότε, από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[W] = 3.5 + 3.5 - 4.472 = 2.5277777$.

2. Από ένα σύνολο 10 ανδρών και 20 γυναικών επιλέγουμε τυχαία δύο άτομα και έστω X το πλήθος των ανδρών που επιλέχτηκαν και Y το πλήθος των γυναικών. Βρείτε τις μέσες τιμές $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \mathbb{E}[X+Y]$.

Λύση: Είναι φανερό ότι οι X, Y παίρνουν μόνο τις τιμές 0, 1 και 2, οπότε αρκεί να βρούμε τις πιθανότητες αυτών των τιμών να είναι τιμές των X, Y. Επίσης έχουμε $X + Y = 2$ οπότε αν βρούμε, π.χ. τη μέση τιμή της X έχουμε εύκολα και τη μέση τιμή της Y.

$\mathbb{P}[X = 0]$: Για να έχουμε $X = 0$ πρέπει να έχουμε επιλέξει 2 άτομα από τις γυναίκες μόνο που έχει πιθανότητα

$$\frac{\binom{20}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{20 \cdot 19}{30 \cdot 29} = 0.436781609.$$

$\mathbb{P}[X = 2]$: Ομοίως πρέπει να επιλέξουμε 2 άτομα από τους άνδρες που έχει πιθανότητα

$$\frac{\binom{10}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{10 \cdot 9}{30 \cdot 29} = 0.10344827.$$

$\mathbb{P}[X = 1]$: Πρέπει να επιλέξουμε έναν άνδρα και μια γυναίκα. Υπάρχουν $10 \cdot 20$ τρόποι να γίνει αυτό, οπότε η πιθανότητα είναι

$$\frac{10 \cdot 20}{\binom{30}{2}} = \frac{400}{30 \cdot 29} = 0.45977011.$$

Άρα $\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \mathbb{P}[X=0] + 1 \cdot \mathbb{P}[X=1] + 2 \cdot \mathbb{P}[X=2] = 0.45977011 + 2 \cdot 0.10344827 = 0.66666665$.

Τώρα, αυτό μοιάζει πολύ με το 2/3, οπότε αναρωτιόμαστε αν υπάρχει και άλλος τρόπος να βγει αυτό το νούμερο, πιο απλός.

Ας είναι $A_1, \ldots, A_{10}$ δείκτριες ΤΜ (μια για κάθε άνδρα) που δείχνουν το αν επιλέγεται ως πρώτο άτομο της επιλογής, και επίσης $B_1, \ldots, B_{10}$ πάλι δείκτριες ΤΜ που δείχνουν αν ο άνδρας επιλέχτηκε ως δεύτερο άτομο της επιλογής. Προφανώς ισχύει

$$X = A_1 + \cdots + A_{10} + B_1 + \cdots + B_{10},$$

άρα, και εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία, $\mathbb{E}[X] = 20\mathbb{E}[A_1] = 20\frac{1}{30} = 2/3$.

3. Ένας κλέφτης έκλεψε μια κάρτα ATM αλλά δεν ξέρει τον αριθμό PIN (4ψήφιος, με όλα τα ψηφία να επιτρέπονται σε κάθε θέση). Πηγαίνει στο μηχάνημα και αρχίζει να δοκιμάζει τυχαία PIN. Κατά μέσο όρο πόσες προσπάθειες θα χρειαστεί μέχρι να το βρει;

Λύση: Σε κάθε προσπάθειά του έχει πιθανότητα $p = 10^{-4}$ να πετύχει το σωστό PIN. Άρα ο αριθμός των προσπαθειών του μέχρι την επιτυχία ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p και η μέση τιμή του είναι $1/p = 10^4$.

4. Αποδείξτε ότι $|\mathbb{E}[X]| \le \mathbb{E}[|X|]$ για κάθε ΤΜ X. Υποθέστε ότι υπάρχουν οι μέσες τιμές.

Λύση: Αν $a \in \mathbb{R}$ γράφουμε $a^+ = \max\{a, 0\}$ για το *θετικό μέρος* του a και $a^- = -\min\{a, 0\}$ για το *αρνητικό μέρος* του a. Ισχύει $a^+ \ge 0$ και $a^- \ge 0$ και επίσης ισχύει $a = a^+ - a^-$ και $|a| = a^+ + a^-$.

Αφού υπάρχει η $\mathbb{E}[X]$ υπάρχουν και οι $\mathbb{E}[X^+], \mathbb{E}[X^-]$ αφού ισχύει

$$0 \le X^+ \le |X|, \quad 0 \le X^- \le |X|.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[X]| &= \left|\mathbb{E}\left[X^+ - X^-\right]\right| \\
&= \left|\mathbb{E}\left[X^+\right] - \mathbb{E}\left[X^-\right]\right| \\
&\le \left|\mathbb{E}\left[X^+\right]\right| + \left|\mathbb{E}\left[X^-\right]\right| \quad \text{(τριγωνική ανισότητα)} \\
&= \mathbb{E}\left[X^+\right] + \mathbb{E}\left[X^-\right] \quad \text{(αφού οι } X^\pm \text{ είναι μη αρνητικές και οι μέσες τιμές τους είναι)} \\
&= \mathbb{E}[|X|].
\end{aligned}$$

5. Αν X, Y είναι δύο ΤΜ αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$(\mathbb{E}[XY])^2 \le \mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Y^2\right].$$

(Μπορείτε να υποθέσετε ότι υπάρχουν όλες οι μέσες τιμές.)

Αν μια ΤΜ παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές τότε είναι φανερό από τον ορισμό της μέσης τιμής ότι και η μέση τιμή της ΤΜ αυτής θα είναι μη αρνητική. Εφαρμόστε αυτό στην ΤΜ $(X + tY)^2$ (όπου t είναι μια πραγματική παράμετρος). Εκφράστε την ποσότητα $\mathbb{E}\left[(X+tY)^2\right]$ ως ένα τριώνυμο του t, το οποίο όπως παρατηρήσαμε είναι μη αρνητικό για κάθε t, άρα έχει διακρίνουσα ≤ 0.

Λύση: Ακολουθούμε την υπόδειξη. Έχουμε για κάθε $t \in \mathbb{R}$

$$0 \le \mathbb{E}\left[(X+tY)^2\right] = \mathbb{E}\left[Y^2\right]t^2 + 2\mathbb{E}[XY]t + \mathbb{E}\left[X^2\right]$$

οπότε, βλέποντας το παραπάνω ως ένα τριώνυμο του t, συνάγουμε ότι η διακρίνουσά του είναι ≤ 0 πράγμα που οδηγεί στην ανισότητα

$$\mathbb{E}[XY]^2 \le \mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Y^2\right].$$

6. Χρησιμοποιείστε την Άσκηση 5 για να δείξετε την ανισότητα

$$\sqrt{\mathbb{E}[(X+Y)^2]} \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} + \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]},$$

για δύο οποιεσδήποτε ΤΜ X και Y.

Λύση: Αν τετραγωνίσετε την προς απόδειξη ανισότητα και αναπτύξετε το τετράγωνο $(+)^2$ θα σας μείνει, μετά τις απλοποιήσεις, ακριβώς η ανισότητα Cauchy–Schwartz.

7. Έχουμε μια τυχαία μεταβλητή X που προέρχεται από ένα πείραμα Π. Αν n είναι ένας φυσικός αριθμός τότε με «δείγμα της X μεγέθους n» εννοούμε ότι εκτελούμε το πείραμα Π n φορές (ανεξάρτητα) και καταγράφουμε τις τιμές X_1, X_2, κλπ, της ΤΜ X στο πρώτο πείραμα, στο δεύτερο κλπ. Ο «δειγματικός μέσος» της X είναι η ΤΜ

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Υπολογίστε την ποσότητα $\mathbb{E}\left[\overline{X}\right]$.

Λύση: Έχουμε

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \frac{1}{n}(\mathbb{E}\left[X_1\right] + \cdots + \mathbb{E}\left[X_n\right]) = \frac{1}{n}n\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

(Η ανεξαρτησία δε χρησιμοποιείται πουθενά.)