

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητήστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Ρίχνουμε δύο ζάρια και έστω X το αποτέλεσμα του πρώτου και Y του δεύτερου. Ορίζουμε επίσης τις δύο ΤΜ

$$Z = \min \{X, Y\} \text{ και } W = \max \{X, Y\}.$$

Βρείτε τις ποσότητες $\mathbb{E}[Z]$ και $\mathbb{E}[W]$.

2. Από ένα σύνολο 10 ανδρών και 20 γυναικών επιλέγουμε τυχαία δύο άτομα και έστω X το πλήθος των ανδρών που επιλέχτηκαν και Y το πλήθος των γυναικών. Βρείτε τις μέσες τιμές $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[X + Y]$.

3. Ένας κλέφτης έκλεψε μια κάρτα ATM αλλά δεν ξέρει τον αριθμό PIN (4ψήφιος, με όλα τα ψηφία να επιτρέπονται σε κάθε θέση). Πηγαίνει στο μηχάνημα και αρχίζει να δοκιμάζει τυχαία PIN. Κατά μέσο όρο πόσες προσπάθειες θα χρειαστεί μέχρι να το βρει;

4. Αποδείξτε ότι $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$ για κάθε ΤΜ X . Υποθέστε ότι υπάρχουν οι μέσες τιμές.

5. Αν X, Y είναι δύο ΤΜ αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$(\mathbb{E}[XY])^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2].$$

(Μπορείτε να υποθέσετε ότι υπάρχουν όλες οι μέσες τιμές.)



Αν μια ΤΜ παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές τότε είναι φανερό από τον ορισμό της μέσης τιμής ότι και η μέση τιμή της ΤΜ αυτής θα είναι μη αρνητική. Εφαρμόστε αυτό στην ΤΜ $(X + tY)^2$ (όπου t είναι μια πραγματική παράμετρος). Εκφράστε την ποσότητα $\mathbb{E}[(X + tY)^2]$ ως ένα τριώνυμο του t , το οποίο όπως παρατηρήσαμε είναι μη αρνητικό για κάθε t , άρα έχει διακρίνουσα ≤ 0 .

6. Χρησιμοποιείστε την Άσκηση 5 για να δείξετε την ανισότητα

$$\sqrt{\mathbb{E}[(X + Y)^2]} \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} + \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]},$$

για δύο οποιεσδήποτε ΤΜ X και Y .

7. Έχουμε μια τυχαία μεταβλητή X που προέρχεται από ένα πείραμα Π . Αν n είναι ένας φυσικός αριθμός τότε με «δείγμα της X μεγέθους n » εννοούμε ότι εκτελούμε το πείραμα Π n φορές (ανεξάρτητα) και καταγράφουμε τις τιμές X_1, X_2, \dots, X_n της ΤΜ X στο πρώτο πείραμα, στο δεύτερο κλπ. Ο «δειγματικός μέσος» της X είναι η ΤΜ

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Υπολογίστε την ποσότητα $\mathbb{E}[\bar{X}]$.