Πιθανοτητες – Άνοιξη 2020-21

Λύσεις των ασκήσεων

1. Αν $m \le a_j \le M$ για κάθε j και $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός των a_j (δηλ. $\forall j\ \lambda_j \in [0,1]$ και $\sum \lambda_j = 1$) τότε δείξτε ότι
$$m \le x \le M.$$
Συμπεράνετε ότι αν μια ακέραια ΤΜ X ικανοποιεί πάντα $m \le X \le M$ τότε ισχύει και
$$m \le \mathbf{E}X \le M.$$
Γιατί υπάρχει πάντα η μέση τιμή της X υπό αυτές τις υποθέσεις;

Λύση: Για να δείξουμε την ανισότητα $m \le x \le M$ το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να πολλαπλασιάσουμε τις ανισότητες $m \le a_j \le M$ με τα λ_j και να τις προσθέσουμε κατά μέλη.

Η μέση τιμή $\mathbf{E}X$ δίνεται από την ποσότητα $\sum_n n f_X(n)$, όπου το άθροισμα εκτείνεται πάνω σε όλα τα n τα οποία αποτελούν τιμές του X με θετική πιθανότητα. Από την υπόθεση $m \le X \le M$ προκύπτει ότι όλα αυτά τα n είναι ανάμεσα στα m και M. Επίσης η μέση τιμή είναι ένας κυρτός συνδυασμός των n αυτών, όπου οι συντελεστές του κυρτού συνδυασμού είναι τα $f_X(n)$. Έπεται η μέση τιμή ικανοποιεί την ίδια ανισότητα: $m \le \mathbf{E}X \le M$.

Τέλος, για να υπάρχει η μέση τιμή $\mathbf{E}X$ πρέπει η σειρά που την ορίζει να είναι συγκλίνουσα, να ισχύει δηλ. ότι $\sum_n |n| f_X(n)$. Αφού όλα τα n που αποτελούν τιμές του X είναι ανάμεσα στα m και M, έπεται ότι τα αντίστοιχα $|n|$ είναι το πολύ $\max\{|m|, |M|\}$ που είναι ένας πεπερασμένος αριθμός, άρα τα n αυτά είναι πεπερασμένα στο πλήθος. Οπότε η σειρά δεν είναι παρά ένα πεπερασμένο άθροισμα που φυσικά συγκλίνει.

2. Αν η X ακολουθεί κατανομή Poisson(λ), για κάποιο $\lambda > 0$, αν δηλ.
$$f_X(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{1}(n \ge 0)$$
δείξτε ότι $\mathbf{E}X = \lambda$.

Λύση:
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=1} n \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda \sum_{n=1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda}, \quad \text{αφού ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}\text{: } e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

3. Δείξτε ότι αν η σταθερά $C > 0$ οριστεί κατάλληλα τότε η συνάρτηση $f(n) = \frac{C}{n^2} \mathbb{1}(n \ge 1)$ είναι πυκνότητα πιθανότητας και ότι οποιαδήποτε ΤΜ με πυκνότητα $f_X \equiv f$ δεν έχει μέση τιμή $\mathbf{E}X$.

Λύση: Όποια και αν είναι η C η σειρά $\sum \frac{1}{n^2}$ άρα αρκεί να ορίσουμε την C από την ισότητα $C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1$.

Αν η ΤΜ X έχει πυκνότητα $f_X(n) = C/n^2$ τότε η σειρά που ορίζει τη μέση τιμή της δε συγκλίνει αφού είναι η
$$\sum_{n=1}^{\infty} nC \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n} = +\infty.$$

4. Αν η πυκνότητα της X είναι συμμετρική ως πρός το σημείο $x \in \mathbb{R}$, αν δηλ. ισχύει
$$f(n) = f(2x - n), \forall n \in \mathbb{Z},$$
τότε, αν υπάρχει η $\mathbf{E}X$ έχουμε $\mathbf{E}X = x$.

Λύση: Ορίζουμε την ΤΜ $Y = 2x - X$ και βλέπουμε ότι

$$f_Y(t) = \mathbb{P}[Y = t] = \mathbb{P}[2x - X = t] = \mathbb{P}[X = 2x - t] = f_X(2x - t) = f_X(t),$$

άρα οι X και Y είναι ισόνομες ΤΜ οπότε έχουν και την ίδια μέση τιμή. Από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής όμως έχουμε

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = \mathbf{E}2x - X = 2x - \mathbf{E}X,$$

και λύνοντας ως προς $\mathbf{E}X$ παίρνουμε $\mathbf{E}X = x$.

5. (α) Δώστε παράδειγμα μιας πυκνότητας $f(x)$ για την οποία δεν υπάρχει η μέση τιμή, δηλ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx = +\infty.$$

(β) Επίσης δώστε παράδειγμα μιας πυκνότητας $f(x)$ για την οποία υπάρχει η μέση τιμή (το προηγούμενο ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο) αλλά δεν υπάρχει η μέση τιμή $\mathbf{E}X^2$ για μια ΤΜ X που έχει την f ως πυκνότητα.
(γ) Τέλος δείξτε ότι αν υπάρχει η μέση τιμή $\mathbf{E}X^2$ τότε υπάρχει και η μέση τιμή $\mathbf{E}X$ όπως και η $\mathbf{E}|X|$.

Λύση: (α) Πάρτε, για παράδειγμα, $f(x) = \mathbb{1}(x \ge 1) \frac{C}{x^2}$, όπου $C = \left(\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}\right)^{-1}$.
(β) Πάρτε, για παράδειγμα, $f(x) = \mathbb{1}(x \ge 1) \frac{C}{x^3}$, όπου $C = \left(\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}\right)^{-1}$.
(γ) Υποθέτουμε ότι η μέση τιμή $\mathbf{E}X^2$ υπάρχει, ότι δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx < \infty.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx < \infty$. Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι $x^2 > |x|$ εκτός όταν $|x| < 1$. Γράφουμε έτσι το τελευταίο ολοκλήρωμα ως το άθροισμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-1} \cdots + \int_{-1}^{1} \cdots + \int_{1}^{\infty} \cdots =: I + II + III.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι οι αριθμοί I, II, III είναι πεπερασμένοι. Έχουμε

$$II = \int_{-1}^{1} |x| f(x)\, dx \le \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \le \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Επίσης

$$I = \int_{-\infty}^{-1} |x| f(x)\, dx \le \int_{-\infty}^{-1} x^2 f(x)\, dx \le \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \mathbf{E}X^2 < \infty,$$

και ομοίως

$$II = \int_{1}^{\infty} |x| f(x)\, dx \le \int_{1}^{\infty} x^2 f(x)\, dx \le \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \mathbf{E}X^2 < \infty.$$

6. Εξηγείστε:

Μια ιστορία από τη Νέα Υόρκη.

Ένας νεαρός ζει στο Manhattan κοντά σ' ένα σταθμό του μετρό. Έχει δύο φίλες, μια στο Brooklyn και μια στο Bronx. Για να επισκεφθεί τη φίλη του στο Brooklyn παίρνει το τρένο από τη μια μεριά της αποβάθρας ενώ για να επισκεφθεί τη φίλη του στο Bronx παίρνει το τρένο από την άλλη μεριά της ίδιας αποβάθρας.

Επειδή και οι δύο του είναι εξίσου αγαπητές όταν πάει στο σταθμό απλά παίρνει το πρώτο τρένο που θα περάσει, είτε προς το Brooklyn είτε προς το Bronx. Ο νεαρός πηγαίνει στο σταθμό του τρένου μια τυχαία στιγμή κάθε Σάββατο απόγευμα. Τα τρένα για Brooklyn και Bronx περνάνε και τα δύο κάθε 10 λεπτά.

Αλλά για κάποιο λόγο, συνειδητοποιεί μετά από κάποιο καιρό, περνάει τον περισσότερο χρόνο του με τη φίλη του στο Brooklyn. Για την ακρίβεια καταλήγει να πηγαίνει στο Brooklyn 9 φορές στις 10 και μόνο 1 φορά στις 10 (κατά μέσο όρο) πηγαίνει στο Bronx. Γιατί συμβαίνει αυτό;

Λύση: Αναπροσαρμόζοντας ενδεχομένως τα ρολόγια μας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το τρένο για Brooklyn περνάει στις :00, :10, :20, :30, :40, :50 κάθε ακέραιας ώρας, και ας είναι x τέτοιο ώστε το τρένο για το Bronx να περνάει σε αυτές τις χρονικές στιγμές συν x λεπτά (περνάει δηλ. x λεπτά μετά την ώρα, x λεπτά μετά τις και δέκα, κλπ).

Για να καταλήξει ο νεαρός στο Bronx πρέπει να φτάσει στο σταθμό είτε από την ακέραια ώρα έως x λεπτά αργότερα, είτε από :10 έως x λεπτά αργότερα, κλπ. Αφού φτάνει στο σταθμό τυχαία ώρα υποθέτουμε ότι η ώρα αφιξής του (μόνο τα λεπτά μετράνε αφού το ποια είναι η ακέραια ώρα της άφιξής του δεν επηρεάζει κάτι) είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στα λεπτά 0-60, άρα η πιθανότητα να πάει στο Bronx είναι $\frac{6x}{60} = \frac{x}{10}$. Αν λοιπόν $x = 1$ τότε πηγαίνει στο Bronx με πιθανότητα 0.1 (τότε το τρένο για Bronx αναχωρεί :01, :11, :21, :31, :41, :51 κάθε ώρα).