1. Ρίχνουμε δύο κοινά ζάρια και έστω X η ΤΜ που ισούται με το μέγιστο από τα δύο αποτελέσματα. Βρείτε την πυκνότητα πιθανότητας της X.

Λύση: Πρέπει να βρούμε την $\mathbb{P}[X = k]$ για $k = 1, 2, \ldots, 6$, αφού δεν υπάρχουν άλλες τιμές που μπορεί να πάρει η X. Είναι προτιμότερο να βρούμε τη συνάρτηση κατανομής

$$F_X(k) = \mathbb{P}[X \le k],$$

από την οποία μπορούμε φυσικά να πάρουμε την πυκνότητα από τον τύπο

$$f_X(k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

Έχουμε, αν A, B είναι τα αποτελέσματα των δύο ζαριών (ανεξάρτητα)

$$\mathbb{P}[X \le k] = \mathbb{P}[A \le k, B \le k] = \mathbb{P}[A \le k]\mathbb{P}[B \le k] = \mathbb{P}[A \le k]^2,$$

άρα οι τιμές της συνάρτησης κατανομής για $k = 1, \ldots, 6$ είναι

$$\mathbb{P}[X \le k] = (k/6)^2 = \frac{k^2}{36},$$

και

$$f_X(k) = \frac{k^2}{36} - \frac{(k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36}.$$

2. Ρίχνουμε ένα τίμιο νόμισμα έως ότου έρθει κορώνα. Έστω N ο αριθμός φορών που το ρίξαμε. Βρείτε την πυκνότητα πιθανότητας και τη συνάρτηση κατανομής της ΤΜ N.

Λύση: Οι τιμές που παίρνει η N είναι $1, 2, \ldots,$ (παίρνει και την τιμή $+\infty$ αλλά με πιθανότητα 0 οπότε θα την αγνοήσουμε). Έχουμε

$$f_N(k) = \mathbb{P}[N = k] = \frac{1}{2^k},$$

αφού πρέπει να φέρουμε γράμματα στις πρώτες $k-1$ ρίψεις και κορώνα στην k ρίψη, που, λόγω ανεξαρτησίας, έχει πιθανότητα 2^{-k}. Για τη συνάρτηση κατανομής έχουμε

$$1 - F_N(k) = \mathbb{P}[N > k] = \mathbb{P}[\text{οι πρώτες } k \text{ ρίψεις είναι Γ}] = 2^{-k},$$

άρα $F_N(k) = 1 - 2^{-k}$. Θα μπορούσαμε να το υπολογίσουμε αυτό και αθροίζοντας την $f_N(k)$.

3. Ρίχνουμε ένα κοινό ζάρι 3 φορές και έστω S το πόσα εξάρια φέραμε. Βρείτε την πυκνότητα πιθανότητας της S. Ποια η πυκνότητα της S^2;

Λύση: Οι δυνατές τιμές της S είναι 0 έως 3. Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα νόμισμα που φέρνει κορώνα με πιθανότητα 1/6 τότε είναι ισοδύναμο με το να ρίξουμε αυτό το νόμισμα 3 φορές και να μετρήσουμε κορώνες, οπότε η S ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(3, 1/6)$ άρα

$$f_S(k) = \binom{3}{k}\frac{1}{6^k}\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}, \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Για να βρούμε την πυκνότητα της S^2 απλά τοποθετούμε τις ίδιες αυτές πιθανότητες αλλά στις θέσεις k^2, για $k = 0, 1, 2, 3$,

$$f_{S^2}(n) = f_S(k), \text{ αν } n = k^2, \text{ με } k \in \{0, 1, 2, 3\}, \text{ και 0 αλλιώς.}$$

4. Ρίχνουμε n τίμια νομίσματα. Όποιο από αυτά δείξει γράμματα το ξαναρίχνουμε άλλη μια φορά (δε συνεχίζουμε). Έστω X το πόσα δείχνουν κορώνα μετά το τέλος της διαδικασίας αυτής. Ποια η πυκνότητα της X;

Λύση: Είναι σα να ρίχνουμε νομίσματα με πιθανότητα κορώνας 3/4, αφού αν βγει γράμματα το ξαναρίχνουμε μια φορά. Οπότε η X ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(n, 3/4)$ και έχει πυκνότητα

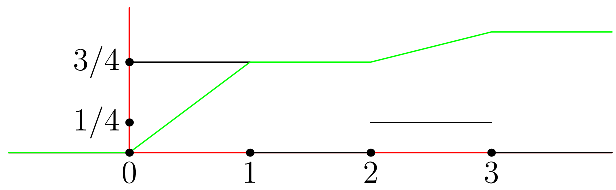
$$f_X(k) = \binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}, \text{ για } 0 \le k \le n \text{ και 0 αλλιώς.}$$

5. Η ΤΜ X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} 3/4 & \text{για } 0 \le x \le 1 \\ 1/4 & \text{για } 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}.$$

Σχεδιάστε το γράφημα της f και υπολογίστε και σχεδιάστε τη συνάρτηση κατανομής $F(x)$.

Λύση:



Σχημα 1. Το γράφημα της f_X (μαύρο) και της F_x (πράσινο).

Η συνάρτηση κατανομής F_X είναι τμηματικά γραμμική με κλίση την αντίστοιχη τιμή της f_X. Είναι σχεδιασμένη με πράσινο

6. Αν η ΤΜ Y έχει συνάρτηση κατανομής $F_Y(x) = x^2$ για $0 \le x \le 1$ ποια είναι η πιθανότητα $\mathbb{P}\left[\frac{1}{2} \le Y \le \frac{3}{4}\right]$; Ποια η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(x)$;

Λύση: Η πυκνότητα είναι $f_X(x) = F_X(x)' = 2x$ για $x \in [0,1]$ και 0 αλλού. Αφού η F_X είναι συνεχής συνάρτηση όλα τα μονοσύνολα έχουν πιθανότητα 0 άρα

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{2} \le Y \le \frac{3}{4}\right] = F_X(\frac{3}{4}) - F_X(\frac{1}{2}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}.$$

7. Η ΤΜ X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[a,b]$. Αυτό σημαίνει ότι $f_X(x) = 0$ εκτός του $[a,b]$ και είναι σταθερή μέσα στο $[a,b]$. Βρείτε ένα τύπο για τη συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$.

Λύση: Για να είναι το ολοκλήρωμα της f_X ίσο με 1 πρέπει η σταθερή τιμή μέσα στο $[a,b]$ να είναι $\frac{1}{b-a}$. Ολοκληρώνοντας την f_X παίρνουμε

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{για } a \le x \le b \\ 1 & \text{για } b \le x \end{cases}$$

8. Η ΤΜ X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο σύνολο $E = [0,1] \cup [2,4]$. Αυτό σημαίνει ότι πάντα $X \in E$ και επίσης αν $I, J \subseteq E$ είναι δύο διαστήματα ίσου μήκους τότε ισχύει

$$\mathbb{P}[X \in I] = \mathbb{P}[X \in J].$$

Βρείτε την πυκνότητα πιθανότητας της X.

Λύση: Η f_X είναι 0 εκτός του E και είναι σταθερή μέσα στο E. Η σταθερά είναι 1 δια το μήκος του E δηλ. 1/3.

9. Η ΤΜ X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0,1]$ και $0 < p < 1$. Ορίζουμε την ΤΜ

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{αν } X \ge p \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής της Y; Ποια είναι η κατανομή της $Z = 3X + 5$;

Λύση: Η Y παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1 άρα είναι μια διακριτή ΤΜ με πυκνότητα $f_Y(0) = \mathbb{P}[Y = 0] = \mathbb{P}[X < p] = p$ και άρα $f_Y(1) = 1 - p$. Άρα

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x < 0 \\ p & \text{για } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{για } 1 \le x \end{cases}$$

Η κατανομή της $3X$ είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, 3]$ και άρα η κατανομή της $Z = 3x + 5$ είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[5, 8]$.

10. Η ΤΜ X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 1]$. Αν $Y = -\ln X$ ποια είναι η πυκνότητα πιθανότητας της Y;

Λύση: Η συνάρτηση κατανομής είναι πιο άμεσα οριζόμενη από την πυκνότητα οπότε ξεκινάμε με αυτήν. Για $t < 0$ έχουμε $F_Y(t) = 0$ αφού < 1. Για $t \ge 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}[Y \le t] \\ &= \mathbb{P}[\ln X \ge -t] \\ &= \mathbb{P}\left[X \ge e^{-t}\right] \\ &= F_X(e^{-t}) \\ &= 1 - e^{-t}. \end{aligned}$$

Η F_Y είναι 0 πριν το 0 και $1 - e^{-t}$ για $t \ge 0$ οπότε η πυκνότητα είναι ομοίως 0 πριν το 0 και $f_Y(t) = e^{-t}$ για $t \ge 0$.