Πιθανοτητες – Άνοιξη 2020-21

Λύσεις των ασκήσεων

1. Δείξτε ότι για κάθε n ισχύει $\left\langle {n \atop 1} \right\rangle = n$. Επίσης ότι, για $n \ge 2$, ισχύει $\left\langle {n \atop 2} \right\rangle = n + \binom{n}{2}$.

Εδώ $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ σημαίνει τον αριθμό συνδυασμών k στοιχείων από n με επανάθεση.

Σκεφτείτε συνδυαστικά. Μην κάνετε πράξεις απλά. Σκεφτείτε δηλ. τι αντικείμενα μετράει το αριστερό μέλος και δείξτε ότι και το δεξί μέλος μετράει τα ίδια αλλά με διαφορετικό τρόπο.

Λύση: Αφού το $\left\langle {n \atop 1} \right\rangle$ μετράει με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 1 αντικείμενο από n με επανάθεση είναι φανερό ότι η επανάθεση δεν παίζει κανένα ρόλο, άρα $\left\langle {n \atop 1} \right\rangle = \binom{n}{1} = n$.

Η διαφορά $\left\langle {n \atop 2} \right\rangle - \binom{n}{2}$ είναι ακριβώς εκείνα τα ζευγάρια που επηρεάζονται από το αν υπάρχει επανάθεση ή όχι. Τα ζευγάρια με διαφορετικά στοιχεία δεν επηρεάζονται και μόνο τα ζευγάρια με ίδια στοιχεία επηρεάζονται (υπάρχουν ως επιλογές στη διαδικασία με επανάθεση αλλά όχι στη διαδικασία χωρίς επανάθεση). Άρα η διαφορά αυτή είναι το πλήθος των ζευγαριών με ίδια στοιχεία, που είναι n.

2. Βρείτε το X στην ισότητα

$$\left\langle {n \atop 3} \right\rangle = \binom{n}{3} + X.$$

Σκεφθείτε συνδυαστικά. Μη χρησιμοποιήσετε τον τύπο που δίνει συνδυασμούς με επανάθεση με διωνυμικό συντελεστή. Ομοίως σκεπτόμενοι βρείτε τη διαφορά $\left\langle {n \atop 4} \right\rangle - \binom{n}{4}$.

Λύση: Σκεφτόμαστε όπως στην προηγούμενη άσκηση.

Η διαφορά $X = \left\langle {n \atop 3} \right\rangle - \binom{n}{3}$ είναι το πλήθος εκείνων των τριάδων που εμφανίζονται στη διαδικασία με επανάθεση αλλά όχι στη διαδικασία χωρίς επανάθεση. Αυτές είναι ακριβώς οι τριάδες με κάποιο επαναλαμβανόμενο στοιχείο. Τις τριάδες αυτές τις χωρίζουμε στις εξής ξένες μεταξύ τους κατηγορίες: xxx και xxy (όπου $x \ne y$). Τα στοιχεία της πρώτης κατηγορίας είναι n στο πλήθος και αυτά της δεύτερης είναι n (οι επιλογές του διπλού στοιχείου) $\times(n-1)$ (οι επιλογές του άλλου, μονού στοιχείου). Άρα $X = n(n-1) + n = n^2$.

Ομοίως σκεπτόμενοι η διαφορά $\left\langle {n \atop 4} \right\rangle - \binom{n}{4}$ είναι το πλήθος των τετράδων με κάποιο επαναλαμβανόμενο στοιχείο, οι οποίες χωρίζονται στις παρακάτω ξένες μεταξύ τους κατηγορίες: $xxxx$, $xxxy$, $xxyy$, $xxyz$ (με x, y, z όλα διαφορετικά) και των οποίων τα μεγέθη είναι n, $n(n-1)$, $n(n-1)/2$ και $n(n-1)(n-2)/2$. Για την κατηγορία $xxyy$ και για την $xxyz$ η διαίρεση διά δύο οφείλεται στην μεν πρώτη περίπτωση στο ότι τα x, y δεν έχουν διακριτούς ρόλους και στο ότι τα y, z δεν έχουν διακριτούς ρόλους.

3. Αν έχετε ένα σωρό από άπειρες όμοιες μπάλες και n αριθμημένα κουτιά χωρητικότητας m μπαλών το καθένα με πόσους τρόπους μπορείτε να τοποθετήσετε κάποιες μπάλες στα κουτιά;

Ίδιο ερώτημα αν τα κουτιά δεν είναι αριθμημένα. Αυτό σημαίνει ότι δε μας ενδιαφέρει η σειρά των κουτιών αλλά μόνο το πόσα κουτιά έχουν μέσα m μπάλες, πόσα έχουν μέσα $m-1$ μπάλες, κλπ.

Λύση: Αφού οι μπάλες είναι όμοιες δεν έχει σημασία ποιες μπάλες μπαίνουν σε κάθε κουτί αλλά μόνο πόσες. Σε κάθε κουτί μπορούν να μπουν από 0 έως m μπάλες, άρα έχουμε $m+1$ επιλογές για κάθε κουτί και συνολικά $(m+1)^n$ επιλογές.

Αν τα κουτιά δεν είναι αριθμημένα τότε, όπως λέει και η εκφώνηση, το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πόσα κουτιά έχουν μέσα συγκεκριμένο αριθμό μπαλών. Έστω x_j ο αριθμός των κουτιών με j μπάλες μέσα τους. Ισχύει τότε

$$n = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_m,$$

άρα ουσιαστικά αναζητούμε τον αριθμό των διαμερίσεων του n σε $m+1$ προσθετέους. Αυτός είναι $\binom{n+(m+1)-1}{n} = \binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$.

4. Σε ένα ασανσέρ μπαίνουν 8 άτομα στο ισόγειο ενός κτηρίου. Ξεκινάει την πορεία του προς τα πάνω από το ισόγειο (όροφος 0) και σταματάει στον τελευταίο όροφο που είναι ο όροφος Νο 6.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να έχουν συμβεί οι αποβιβάσεις των 8 ατόμων αν

(1) Οι 8 επιβάτες είναι πανομοιότυποι μεταξύ τους.

(2) Υπάρχουν 5 άνδρες επιβάτες και 3 γυναίκες. Άτομα του ίδιου φύλου δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους.

(3) Κάντε τις προηγούμενες περιπτώσεις υποθέτοντας ότι συμβαίνει τουλάχιστον μια αποβίβαση στον 6ο όροφο (αλλιώς δε θα είχε λόγο το ασανσέρ να ανέβει ως εκεί) ή, αντίθετα, χωρίς να υποθέσετε κάτι τέτοιο (υποθέστε δηλ. ότι το ασανσέρ πάντα πάει ως τον 6ο, ακόμη κι αν δεν έχει να αποβιβάσει κάποιον εκεί).

Λύση:
(1): Έστω x_j το πόσοι κατέβηκαν στον j όροφο, $j = 1, 2, \ldots, 6$. Τότε $8 = x_1 + \cdots + x_6$ και άρα ο αριθμός είναι $\binom{8+6-1}{8} = \binom{13}{8}$.

(2): Έστω m_j, w_j το πόσοι άνδρες και πόσες γυναίκες κατέβηξαν στον j όροφο. Τότε $5 = m_1 + \cdots + m_6$ και $3 = w_1 + \cdots + w_6$ και αυτά μπορούν συμβούν με $\binom{5+6-1}{5}$ και $\binom{3+6-1}{3}$ τρόπους αντίστοιχα και ανεξάρτητα άρα οι συνολικές μας επιλογές είναι $\binom{10}{5}\binom{8}{3}$.

(3): Για να βρούμε πώς διαμορφώνονται τα προηγούμενα δύο αποτελέσματα υπό την επιπλέον υπόθεση ότι το πάντα κάποιος κατεβαίνει στον 6ο όροφο αρκεί να αφαιρέσουμε τις περιπτώσεις όπου όλοι κατεβαίνουν μέχρι και τον 5ο όροφο. Για το (1) απλά ξαναλύνουμε το πρόβλημα με 5 αντί για 6 δηλ. πρέπει να αφαιρέσουμε $\binom{8+5-1}{8} = \binom{12}{8}$. Για το (2) κάνουμε το ίδιο.

5. Στη στατιστική μηχανική εξετάζουμε ένα σύστημα από t σωμάτια κάθε ένα από τα οποία μπορεί να βρίσκεται σε p διαφορετικές καταστάσεις, π.χ. σε p διαφορετικά ενεργειακά επίπεδα. Μια *κατάσταση* του συστήματος είναι η περιγραφή της κατάστασης του κάθε σωματιδίου. Όταν τα σωμάτια είναι ίδια μεταξύ τους υποθέτουμε συνήθως ότι δεν έχει σημασία ποια από τα t σωμάτια είναι στο κάθε ενεργειακό επίπεδο αλλά μόνο πόσα. Η υπόθεση ότι όλες αυτές οι καταστάσεις είναι εξίσου πιθανές λέγεται κατανομή Bose–Einstein.

Στο μοντέλο Bose–Einstein πόσες διαφορετικές καταστάσεις του συστήματος υπάρχουν;

Λύση: Αν πούμε x_j τον αριθμό σωματιδίων στην j κατάσταση τότε έχουμε $t = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$ άρα ο αριθμός των καταστάσεων του συστήματος είναι ο αριθμός των διαμερίσεων του t σε p προσθετέους, δηλ. $\binom{t+p-1}{t}$.

6. Στην κατανομή Fermi–Dirac υποθέτουμε ότι τα t σωμάτια είναι όλα όμοια και ότι δε μπορούν δύο σωμάτια να βρίσκονται στο ίδιο ενεργειακό επίπεδο (υπάρχουν p ενεργειακά επίπεδα). Αν $t \le p$ πόσες διαφορετικές καταστάσεις του συστήματος σωματίων υπάρχουν;

Λύση: Αφού τα σωμάτια είναι όλα όμοια αρκεί να πούμε ποιες t από τις p καταστάσεις καταλαμβάνουν, δηλ. $\binom{p}{t}$.

7. Υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

Λύση: Στο διωνυμικό θεώρημα $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ παίρνουμε $x = 2, y = 1$ και παίρνουμε αποτέλεσμα 3^n.

8. Υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. Ομοίως το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.

Ξεκινείστε από τη σχέση $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ και παραγωγίστε την ως προς x.

Λύση: Ακολουθούμε την υπόδειξη. Παραγωγίζουμε τη σχέση της υπόδειξης ως προς x και παίρνουμε

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}.$$

Θέτουμε $x = 1$ και το αποτέλεσμα είναι $n2^{n-1}$.

Ξαναπαραγωγίζουμε ως προς x και παίρνουμε

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k},$$

και, αφού θέσουμε $x = 1$ παίρνουμε ως αποτέλεσμα $n(n-1)2^{n-2}$.

9. Υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Όπως την Άσκηση 8 αλλά ολοκληρώστε αντί να παραγωγίσετε.

Λύση: Ολοκληρώνουμε τη σχέση $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ για $\int_0^t \ldots\, dx$ και παίρνουμε

$$\int_0^t (1+x)^n\, dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^t x^k\, dx, \quad \text{ή}$$

$$\frac{(1+t)^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{t^{k+1}}{k+1}, \quad \text{και θέτοντας } t=1 \text{ παίρνουμε}$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

10. Αποδείξτε με συνδυαστικό επιχείρημα ότι αν $0 \le i \le k \le n$ τότε ισχύει

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}.$$

Λύση: Θα δείξουμε ότι και τα δύο μέλη μετράνε με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω k αντικείμενα από τα $1, 2, \ldots, n$ και μετά να χρωματίσω κάποια i από αυτά μαύρα και τα υπόλοιπα $k-i$ άσπρα.

Στο δεξί μέλος επιλέγω πρώτα όλα τα k αντικείμενα (επιλογές $\binom{n}{k}$) και μετά από αυτά επιλέγω τα i που θα βάψω μαύρα (επιλογές $\binom{k}{i}$).

Στο αριστερό μέλος επιλέγω πρώτα τα i αντικείμενα που θα βάψω μαύρα (επιλογές $\binom{n}{i}$) και από τα υπόλοιπα $n-i$ επιλέγω μετά τα $k-i$ που θα βάψω άσπρα (επιλογές $\binom{n-i}{k-i}$).

11. Αποδείξτε με συνδυαστικό επιχείρημα την ταυτότητα

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1}.$$

Πόσα υποσύνολα του $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ μεγέθους k υπάρχουν τ.ώ. το μεγαλύτερο στοιχείο τους να είναι το i;

Λύση: Αν πούμε A_i το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, n\}$, μεγέθους k και με μέγιστο στοιχείο το i $(i = k, k+1, \ldots, n)$ τότε έχουμε

$$\binom{n}{k} = |A_k| + |A_{k+1}| + \cdots + |A_n|.$$

Όμως $|A_i| = \binom{i-1}{k-1}$ αφού το στοιχείο k πρέπει να ανήκει σε ένα τέτοιο σύνολο (στοιχείο του A_i) και άρα για να καθορίσουμε πλήρως το σύνολο αυτό αρκεί να πάρουμε $k-1$ μικρότερα του i στοιχεία, το οποίο γίνεται με $\binom{i-1}{k-1}$ τρόπους.

12. Ας είναι A ένα υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, 50\}$ με μέγεθος 10. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο υποσύνολα του A με το ίδιο άθροισμα στοιχείων.

Πόσα είναι τα διαφορετικά υποσύνολα του A και ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το άθροισμα των στοιχείων ενός από αυτά;

Λύση: Αφού το A έχει 10 στοιχεία έχει $2^{10} = 1024$ υποσύνολα. Το άθροισμα στοιχείων ενός τέτοιου υποσυνόλου είναι το πολύ 500 αφού το A έχει το πολύ 10 στοιχεία που το καθένα είναι το πολύ 50. Άρα καποια δύο αθροίσματα είναι ίδια.