Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητείστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Δείξτε ότι για κάθε n ισχύει $\left\langle {n \atop 1} \right\rangle = n$. Επίσης ότι, για $n \geq 2$, ισχύει $\left\langle {n \atop 2} \right\rangle = n + \binom{n}{2}$.

Εδώ $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ σημαίνει τον αριθμό συνδυασμών k στοιχείων από n με επανάθεση.

Σκεφτείτε συνδυαστικά. Μην κάνετε πράξεις απλά. Σκεφτείτε δηλ. τι αντικείμενα μετράει το αριστερό μέλος και δείξτε ότι και το δεξί μέλος μετράει τα ίδια αλλά με διαφορετικό τρόπο.

2. Βρείτε το X στην ισότητα

$$\left\langle {n \atop 3} \right\rangle = \binom{n}{3} + X.$$

Σκεφθείτε συνδυαστικά. Μη χρησιμοποιήσετε τον τύπο που δίνει συνδυασμούς με επανάθεση με διωνυμικό συντελεστή. Ομοίως σκεπτόμενοι βρείτε τη διαφορά $\left\langle {n \atop 4} \right\rangle - \binom{n}{4}$.

3. Αν έχετε ένα σωρό από άπειρες όμοιες μπάλες και n αριθμημένα κουτιά χωρητικότητας m μπαλών το καθένα με πόσους τρόπους μπορείτε να τοποθετήσετε κάποιες μπάλες στα κουτιά;

Ίδιο ερώτημα αν τα κουτιά δεν είναι αριθμημένα. Αυτό σημαίνει ότι δε μας ενδιαφέρει η σειρά των κουτιών αλλά μόνο το πόσα κουτιά έχουν μέσα m μπάλες, πόσα έχουν μέσα $m-1$ μπάλες, κλπ.

4. Σε ένα ασανσέρ μπαίνουν 8 άτομα στο ισόγειο ενός κτηρίου. Ξεκινάει την πορεία του προς τα πάνω από το ισόγειο (όροφος 0) και σταματάει στον τελευταίο όροφο που είναι ο όροφος Νο 6.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να έχουν συμβεί οι αποβιβάσεις των 8 ατόμων αν

(1) Οι 8 επιβάτες είναι πανομοιότυποι μεταξύ τους.
(2) Υπάρχουν 5 άνδρες επιβάτες και 3 γυναίκες. Άτομα του ίδιου φύλου δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους.
(3) Κάντε τις προηγούμενες περιπτώσεις υποθέτοντας ότι συμβαίνει τουλάχιστον μια αποβίβαση στον 6ο όροφο (αλλιώς δε θα είχε λόγο το ασανσέρ να ανέβει ως εκεί) ή, αντίθετα, χωρίς να υποθέσετε κάτι τέτοιο (υποθέστε δηλ. ότι το ασανσέρ πάντα πάει ως τον 6ο, ακόμη κι αν δεν έχει να αποβιβάσει κάποιον εκεί).

5. Στη στατιστική μηχανική εξετάζουμε ένα σύστημα από t σωμάτια κάθε ένα από τα οποία μπορεί να βρίσκεται σε p διαφορετικές καταστάσεις, π.χ. σε p διαφορετικά ενεργειακά επίπεδα. Μια *κατάσταση* του συστήματος είναι η περιγραφή της κατάστασης του κάθε σωματιδίου. Όταν τα σωμάτια είναι ίδια μεταξύ τους υποθέτουμε συνήθως ότι δεν έχει σημασία ποια από τα t σωμάτια είναι στο κάθε ενεργειακό επίπεδο αλλά μόνο πόσα. Η υπόθεση ότι όλες αυτές οι καταστάσεις είναι εξίσου πιθανές λέγεται κατανομή Bose–Einstein.

Στο μοντέλο Bose–Einstein πόσες διαφορετικές καταστάσεις του συστήματος υπάρχουν;

6. Στην κατανομή Fermi–Dirac υποθέτουμε ότι τα t σωμάτια είναι όλα όμοια και ότι δε μπορούν δύο σωμάτια να βρίσκονται στο ίδιο ενεργειακό επίπεδο (υπάρχουν p ενεργειακά επίπεδα). Αν $t \leq p$ πόσες διαφορετικές καταστάσεις του συστήματος σωματίων υπάρχουν;

7. Υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

8. Υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. Ομοίως το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.

Ξεκινείστε από τη σχέση $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ και παραγωγίστε την ως προς x.

9. Υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Όπως την Άσκηση 8 αλλά ολοκληρώστε αντί να παραγωγίσετε.

10. Αποδείξτε με συνδυαστικό επιχείρημα ότι αν $0 \leq i \leq k \leq n$ τότε ισχύει

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}.$$

11. Αποδείξτε με συνδυαστικό επιχείρημα την ταυτότητα

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1}.$$

Πόσα υποσύνολα του $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ μεγέθους k υπάρχουν τ.ώ. το μεγαλύτερο στοιχείο τους να είναι το i;

12. Ας είναι A ένα υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, 50\}$ με μέγεθος 10. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο υποσύνολα του A με το ίδιο άθροισμα στοιχείων.

Πόσα είναι τα διαφορετικά υποσύνολα του A και ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το άθροισμα των στοιχείων ενός από αυτά;