1. Ας είναι A, B, C τρία ενδεχόμενα. Δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B|A] \cdot \mathbb{P}[C|A \cap B].$$

Δείξτε επίσης ότι $\mathbb{P}[A|B] \geq \mathbb{P}[A]$ αν και μόνο αν $\mathbb{P}[B|A] \geq \mathbb{P}[B]$. Ένας τρόπος να ερμηνεύσουμε (όχι να αποδείξουμε) την τελευταία ισοδυναμία είναι ότι το να γνωρίζουμε ότι ισχύει το B επηρεάζει θετικά την πιθανότητα να ισχύει το A αν και μόνο αν το να γνωρίζουμε ότι ισχύει το A επηρεάζει θετικά το να ισχύει το B.

Λύση: Εφαρμόζοντας τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε

$$\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[C|A \cap B]\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[C|A \cap B]\mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}[A].$$

Έχουμε επίσης ότι $\mathbb{P}[A|B] \geq \mathbb{P}[A]$ αν και μόνο αν $\mathbb{P}[A \cap B] \geq \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$, μια σχέση που είναι συμμετρική στα A, B, άρα το ίδιο είναι και η αρχική μας σχέση $\mathbb{P}[A|B] \geq \mathbb{P}[A]$.

2. Ένα δοχείο περιέχει 5 άσπρες και 4 μαύρες μπάλες. Ένα άλλο δοχείο περιέχει 7 άσπρες και 9 μαύρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μια μπάλα από το πρώτο δοχείο και τη βάζουμε στο δεύτερο. Έπειτα επιλέγουμε τυχαία μια μπάλα από το δεύτερο δοχείο. Ποια η πιθανότητα η τελευταία αυτή μπάλα να είναι άσπρη;

Ονομάστε B το ενδεχόμενο να μεταφέρατε μαύρη μπάλα στο πρώτο βήμα της διαδικασίας και W το ενδεχόμενο να επιλέξατε άσπρη μπάλα στο δεύτερο βήμα. Χρησιμοποιείστε τον τύπο ολικής πιθανότητας για τον υπολογισμό του $\mathbb{P}[W]$ ως προς τη διαμέριση $\Omega = B \cup B^c$.

Λύση: Ακολουθώντας την υπόδειξη έχουμε

$$\mathbb{P}[W] = \mathbb{P}[W|B]\mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[W|B^c]\mathbb{P}[B^c] = \frac{7}{17}\frac{4}{9} + \frac{8}{17}\frac{5}{9} = 0.444444444.$$

3. Ένας φοιτητής βρίσκεται αντιμέτωπος με μια ερώτηση πολλαπλών επιλογών. Έχει N επιλογές μια από τις οποίες είναι η σωστή. Αν ο φοιτητής ξέρει τη σωστή απάντηση την επιλέγει. Αν όχι επιλέγει μια απάντηση τυχαία. (Εννοείται εδώ ότι ο φοιτητής γνωρίζει πότε γνωρίζει τη σωστή απάντηση.)

Ας πούμε ότι η πιθανότητα να γνωρίζει ο φοιτητής την απάντηση είναι p.

(1) Ποια η πιθανότητα να βρει τη σωστή απάντηση ο φοιτητής.
(2) Αν υποθέσουμε ότι ο φοιτητής βρήκε τη σωστή απάντηση ποια η πιθανότητα να τη γνώριζε (και να μην το έπαιξε στην τύχη);

Υπολογίστε τα δύο παραπάνω ερωτήματα και στην περίπτωση που $p = 1/2$ και εξηγείστε πώς ο αριθμός N επηρεάζει τις δύο αυτές ποσότητες.

Ορίστε τα δύο ενδεχόμενα K (ο φοιτητής ξέρει την απάντηση) και C (ο φοιτητής επιλέγει τελικά τη σωστή απάντηση). Χρησιμοποιείστε τον τύπο ολικής πιθανότητας για το πρώτο ερώτημα και τον τύπο του Bayes για το δεύτερο.

Λύση: Ακολουθούμε την υπόδειξη:

$$\mathbb{P}[C] = \mathbb{P}[C|K]\mathbb{P}[K] + \mathbb{P}[C|K^c]\mathbb{P}[K^c] = 1 \cdot p + \frac{1}{N}(1-p) = p + \frac{1-p}{N}.$$

Επίσης

$$\mathbb{P}[K|C] = \frac{\mathbb{P}[C|K]\mathbb{P}[K]}{\mathbb{P}[C]} = \frac{p}{p + \frac{1-p}{N}}.$$

Παρατηρείστε ότι για $N \to +\infty$ έχουμε $\mathbb{P}[C] \to p$ και $\mathbb{P}[K|C] \to 1$. Με άλλα λόγια, όταν έχουμε πολλές απαντήσεις (μεγάλο N) τότε η τυχαία επιλογή του φοιτητή σε περίπτωση που δε γνωρίζει την απάντηση ελάχιστα βοηθάει.

4. «Έστω ένας τυχαίος φυσικός αριθμός», ξεκινάει την κουβέντα ο φίλος σας. «Τι εννοείς;», τον ρωτάτε. «Ό,τι εννοούμε συνήθως, ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί έχουν την ίδια πιθανότητα», απαντά.

Εξηγείστε του ότι αυτό δεν έχει νόημα.

Λύση: Είναι αδύνατο να έχουμε το δειγματικό χώρο $\Omega = \mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$ με ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας, με όλα τα στοιχεία του δηλ. να είναι ισοπίθανα. Αυτό συμβαίνει επειδή ο χώρος είναι άπειρος και αριθμήσιμος.

(Δε συμβαίνει π.χ. με $\Omega = \mathbb{R}$ το οποίο είναι άπειρο αλλά όχι αριθμήσιμο.) Ας πούμε ότι υπάρχει τέτοια κατανομή πιθανότητας και ας ορίσουμε p να είναι η πιθανότητα κάθε στοιχείου. Τότε

$$1 = \mathbb{P}[\Omega] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[\{n\}] = \sum_{n=1}^{\infty} p.$$

Αν $p > 0$ τότε το τελευταίο άθροισμα είναι $+\infty$ ενώ αν $p = 0$ τότε είναι 0. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε άτοπο.

5. Ρίχνουμε ένα ζάρι άπειρες φορές και παίρνουμε έτσι τα αποτελέσματα $X_1, X_2, \ldots$, με $X_j \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ για $j = 1, 2, \ldots$. Ας είναι E το ενδεχόμενο να μη δούμε ποτέ στην ακολουθία αυτή τη λέξη 123. Με άλλα λόγια, το ενδεχόμενο E ισχύει αν και μόνο αν για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $X_n X_{n+1} X_{n+2} \neq 123$. Δείξτε ότι $\mathbb{P}[E] = 0$.

Αν συμβαίνει το E τότε ισχύουν και τα ενδεχόμενα $E_n = \{X_n X_{n+1} X_{n+2} \neq 123\}$ για $n = 1, 4, 7, 10, \ldots$. Δηλαδή

$$E \subseteq \bigcap_{k \geq 0} E_{3k+1}.$$

Παρατηρείστε ότι τα ενδεχόμενα αυτά (που συμμετέχουν στην τομή) είναι ανεξάρτητα αφού το καθένα εξαρτάται από διαφορετικές ρίψεις του ζαριού. Άρα η πιθανότητα του E είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων τους.

Λύση: Ακολουθώντας την υπόδειξη και γράφοντας $E_n = \bigcap_{k=0}^{n} E_{3k+1}$ έχουμε $E \subseteq E_n$ για κάθε n και άρα

$$\mathbb{P}[E] \leq \mathbb{P}[E_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{k=0}^{n} E_{3k+1}\right] = \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}[E_{3k+1}] = \bigcap_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{6^3}\right) = \left(1 - \frac{1}{6^3}\right)^{n+1} \to 0,$$

αφού $\mathbb{P}[E_{3k+1}] = 1 - \frac{1}{6^3}$. Άρα $\mathbb{P}[E] = 0$.

6. Έστω $0 \leq a_n \leq 1$ ακολουθία αριθμών. Δείξτε ότι

$$0 = \prod_{n=1}^{\infty} a_n \quad \left(= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n\right)$$

αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - a_n) = \infty$.

Πάρτε λογαρίθμους και χρησιμοποιήστε την ανισότητα

$$2(x-1) \leq \log x \leq x - 1,$$

που ισχύει για $\theta \leq x \leq 1$ (θ είναι κάποιος αριθμός στο $(0,1)$ που δε χρειάζεται να τον γνωρίζουμε ακριβώς).

Δε χρειάζονται πιθανότητες γι' αυτή την άσκηση, αλλά αυτή η ισοδυναμία είναι πολύ χρήσιμη στις πιθανότητες.

Λύση: Η ισότητα $0 = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$ σημαίνει $\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n = 0$. Παίρνοντας λογαρίθμους βλέπουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} -\log a_n = +\infty$, πράγμα που είναι το ίδιο με την απόκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\log a_n = +\infty.$$

Αν άπειρα από τα a_n είναι $< \theta$ τότε άπειρα από τα $-\log a_n$ είναι μεγαλύτερα από το θετικό αριθμό $-\log \theta$, οπότε η προηγούμενη σειρά αποκλίνει (και άρα $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ σε αυτή την περίπτωση). Το ίδιο συμβαίνει όμως και με την άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - a_n)$ αφού άπειροι όροι της είναι $> 1 - \theta$ που είναι θετικός αριθμός. Άρα στην περίπτωση που άπειρα από τα a_n είναι $< \theta$ η επιθυμητή ισοδυναμία ισχύει.

Υποθέτουμε από δω και στο εξής ότι όλα τα a_n είναι στο διάστημα $[\theta, 1]$ για $n \geq n_0$. Οι δύο προτάσεις $0 = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - a_n) = \infty$ δεν επηρεάζονται φυσικά από το τι συμβαίνει για ένα πεπερασμένο πλήθος από τα a_n άρα αρκεί να περιορίσουμε τα αθροίσματα και γινόμενα για $n \geq n_0$ και να δείξουμε την ισοδυναμία για αυτά. Για αυτά τα n ισχύει όμως $2(1 - a_n) \geq -\log a_n \geq (1 - a_n)$ άρα οι δύο σειρές

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} -\log a_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} (1 - a_n)$$

συγκλίνουν και αποκλίνουν μαζί.

7. Ας είναι $E_1, E_2, \ldots \subseteq \Omega$ μια άπειρη ακολουθία ενδεχομένων και έστω ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_n] < \infty.$$

(Για παράδειγμα, μπορεί να ισχύει $\mathbb{P}[E_n] \le 1/n^2$.) Ορίζουμε το ενδεχόμενο E να είναι το να συμβαίνουν άπειρα από τα E_n (το έχουμε ξαναδεί στο Φυλλάδιο 1 ως το limsup της ακολουθίας E_n). Δείξτε ότι $\mathbb{P}[E] = 0$.

Αν $\omega \in E$ τότε το ω ανήκει σε άπειρα από τα E_n, άρα ανήκει σε **όλα τα ενδεχόμενα**

$$T_k = \bigcup_{n \ge k} E_n, \quad (\text{για κάθε } k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Έπεται ότι το E είναι υποσύνολο όλων των T_k και άρα (μονοτονία της συνολοσυνάρτησης πιθανότητας) $\mathbb{P}[E] \le \mathbb{P}[T_k]$, για κάθε k. Χρησιμοποιείστε την υποαθροιστικότητα της συνολοσυνάρτησης πιθανότητας καθώς και το ότι η σειρά στην υπόθεση του προβλήματος είναι πεπερασμένη για να δείξετε ότι $\mathbb{P}[T_k] \to 0$. Θυμίζουμε ότι αν $a_n \ge 0$ και $\sum_{n \ge 1} a_n < \infty$ τότε

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n \ge k} a_n = 0.$$

(Η ουρά συγκλίνουσας σειράς δηλ. τείνει στο 0.)

***Λύση*:** Συνεχίζοντας την υπόδειξη έχουμε

$$\mathbb{P}[T_k] \le \sum_{n \ge k} \mathbb{P}[E_n],$$

και αφού η σειρά

$$\sum_{n \ge 0} \mathbb{P}[E_n] < \infty$$

έχουμε ότι η ουρά της σειράς $\sum_{n \ge k} \mathbb{P}[E_n] \to 0$ για $k \to \infty$. Έχουμε λοιπόν $\mathbb{P}[T_k] \to 0$, άρα $\mathbb{P}[E] = 0$.

8. Έχουμε ένα νόμισμα που φέρνει κορώνα με πιθανότητα $p \in (0,1)$ και γράμματα με πιθανότητα $1-p$. Ρίχνουμε το νόμισμα 2 φορές. Αν τα δύο αποτελέσματα είναι διαφορετικά, ποια η πιθανότητα το πρώτο νόμισμα να είναι κορώνα; Μπορείτε χρησιμοποιώντας αυτό το νόμισμα (το p δεν το γνωρίζετε) και ρίχνοντάς το ενδεχομένως αρκετές φορές να «προσομοιώσετε» ένα τίμιο νόμισμα; Με άλλα λόγια μπορείτε χρησιμοποιώντας αυτό το νόμισμα να στήσετε ένα πείραμα που θα έχει δύο ισοπίθανα αποτελέσματα;

***Λύση*:** Έχουμε

$$\mathbb{P}[\text{Κ}|\text{ΚΓ ή ΓΚ}] = \frac{\mathbb{P}[\text{Κ και (ΚΓ ή ΓΚ)}]}{\mathbb{P}[\text{ΚΓ ή ΓΚ}]} = \frac{\mathbb{P}[\text{ΚΓ}]}{\mathbb{P}[\text{ΚΓ ή ΓΚ}]} = \frac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \frac{1}{2}.$$

Για να προσομοιώσουμε ένα τίμιο νόμισμα με ένα νόμισμα που φέρνει κορώνα με πιθανότητα p (την οποία δε γνωρίζουμε) κάνουμε το εξής πείραμα: ρίχνουμε το νόμισμα δύο φορές και επαναλαμβάνουμε αυτή την πράξη μέχρι τα δύο αποτελέσματα να είναι διαφορετικά. Όταν αυτό συμβεί τότε αν το αποτέλεσμα είναι ΚΓ θεωρούμε ότι φέραμε κορώνα ενώ όταν είναι ΓΚ θεωρούμε ότι φέραμε γράμματα. Αυτά τα δύο είναι ισοπίθανα με βάση τον προηγούμενο υπολογισμό.

9. Το παρακάτω πρόγραμμα σε `python` προσομοιώνει την παραγωγή τυχαίων στοιχείων από το $\{1, 2, \ldots, N\}$ με δοσμένες πιθανότητες p_j, $j = 1, 2, \ldots, N$. Ξεκινά από την παραγωγή τυχαίων αριθμών στο διάστημα $[0,1]$ με την ομοιόμορφη κατανομή με τη συνάρτηση `random.uniform(0, 1)`. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση αυτή παράγει ένα τυχαίο αριθμό στο διάστημα $(a,b) \subseteq [0,1]$ με πιθανότητα που εξαρτάται μόνο από το μήκος του διαστήματος $b-a$.

Για να το πετύχουμε αυτό αντιστοιχούμε σε κάθε ένα από τους αριθμούς $j = 1, 2, \ldots, N$ ένα διάστημα στο $[0,1]$ μήκους p_j, και ας είναι $x_0 - 0, x_1 = p_1, x_2 = x_1 + p_2, x_3 = x_2 + p_3, \ldots, x_N = 1$ τα σημεία που ορίζουν αυτά τα διαστήματα.

Πετάμε λοιπόν ένα τυχαίο σημείο r στο $[0,1]$ και αν πέσει μέσα στο διάστημα $[x_{j-1}, x_j]$ τότε θεωρούμε ότι παρήχθη το τυχαίο σημείο j ως αποτέλεσμα του πειράματος. Έτσι ο ακέραιος j παράγεται με πιθανότητα ακριβώς p_j αφού το r πέφτει σε ένα διάστημα $(a,b) \subseteq [0,1]$ με πιθανότητα ακριβώς $b-a$.

Αν δεν έχετε `python 3` εγκατεστημένη τον υπολογιστή σας μπορείτε να τρέξετε αυτό το πρόγραμμα και να παίξετε με αυτό online, π.χ. στο `https://repl.it/@kolount/samplepy`

```python
# Το πρόγραμμα αυτό δείχνει πώς παράγουμε ένα από N σημεία με δοσμένες πιθανότητες.
# Ξεκινά από παραγωγή αριθμών ομοιόμορφα στο [0, 1] με τη συνάρτηση random.uniform(0,1)
import random
k = 10000 # Παράγουμε τόσα σημεία με την επιθυμητή κατανομή
P = [0.1, 0.2, 0.05, 0.05, 0.3, 0.2, 0.1] # Αυτές είναι οι επιθυμητές πιθανότητες των 1, 2, ..., N.
        # Το άθροισμά τους πρέπει να είναι 1.
N = len(P) # Το πλήθος των σημείων στο δειγματικό χώρο Ω=1, 2, ..., N
x = [0] # Η λίστα x θα έχει μήκος N+1, με το πρώτο σημείο να είναι το 0 και το τελευταίο να είναι το 1.
pointer = 0 # ξεκινά από το αριστερό άκρο του [0,1] και καταλήγει στο δεξί άκρο
```

```
for p in P:
  pointer += p
  x.append(pointer) # εδώ υπολογίζουμε τα ενδιάμεσα σημεία του [0,1] που ορίζουν τα διαστήματα
total = [0]*(N+1) # μετράμε εδώ πόσες φορές παρήχθη ο ακέραιος j. Είναι αρχικά μια λίστα από μηδενικά.
for i in range(k): # Εκτελούμε το πείραμε k φορές
  r = random.uniform(0., 1.) # παράγουμε τυχαίο σημείο r στο [0,1]
  j = 1
  while x[j]<r: # και προχωράμε από αριστερά προς τα δεξιά μέχρι να βρούμε σε ποιο διάστημα έπεσε.
    j += 1
  total[j] += 1 # αφού βρούμε πού έπεσε αυξάνουμε κατά ένα το πόσα σημεία έπεσαν στο διάστημα αυτό
print("Συχνότητες που παρήχθησαν:")
for i in range(1, N+1):
  print("{} παρήχθη με συχνότητα {}, επιθυμητή πιθανότητα {}".format(i, total[i]/k, P[i-1]))
```

Ένα τυπικό output του προγράμματος είναι π.χ.

```
Συχνότητες που παρήχθησαν:
1 παρήχθη με συχνότητα 0.0996, επιθυμητή πιθανότητα 0.1
2 παρήχθη με συχνότητα 0.2027, επιθυμητή πιθανότητα 0.2
3 παρήχθη με συχνότητα 0.0506, επιθυμητή πιθανότητα 0.05
4 παρήχθη με συχνότητα 0.0453, επιθυμητή πιθανότητα 0.05
5 παρήχθη με συχνότητα 0.2956, επιθυμητή πιθανότητα 0.3
6 παρήχθη με συχνότητα 0.2062, επιθυμητή πιθανότητα 0.2
7 παρήχθη με συχνότητα 0.1, επιθυμητή πιθανότητα 0.1
```