Πιθανοτητες – Άνοιξη 2020-21

Λύσεις των ασκήσεων

1. Από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 επιλέγουμε πρώτα ένα και κατόπιν άλλο ένα από αυτά που απέμειναν, στην τύχη. Αν και τα 20 δυνατά αποτελέσματα αυτού του πειράματος είναι ισοπίθανα ποια είναι η πιθανότητα να επιλεγεί περιττός αριθμός (α) την πρώτη φορά, (β) τη δεύτερη φορά και (γ) και τις δύο φορές.

Λύση: (α) Το ενδεχόμενο για αυτό το πρόβλημα είναι όλα τα ζεύγη με περιττό στην πρώτη θέση. Αυτά είναι $3 \cdot 4$ γιατί κάθε ένας από τους τρεις περιττούς που μπορεί να επιλεγεί για την πρώτη θέση του ζεύγους μπορεί να συνδυασθεί με οποιοδήποτε άλλο στοιχείο (από τα 4 που απομένουν) στη δεύτερη θέση. Άρα η πιθανότητα είναι 12/20.

(β) Ακριβώς το ίδιο.

(γ) Το ενδεχόμενο τώρα έχει $3 \cdot 2$ αποτελέσματα γιατί κάθε περιττός της πρώτης θέσης μπορεί να συνδυασθεί με κάθε ένα από τους δύο απομέναντες περιττούς. Άρα η πιθανότητα είναι 6/20.

2. Ρίχνουμε ένα τίμιο νόμισμα μέχρι δύο διαδοχικά αποτελέσματα να είναι ίδια, οπότε και σταματάμε. Το αποτέλεσμα αυτού του πειράματος είναι η ακολουθία από Κ ή Γ που παρήγαγε το πείραμα. Περιγράφτε όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου (μη ξεχάσετε ότι είναι δυνατό ποτέ να μην έρθει δύο φορές το ίδιο αποτέλεσμα).

Λύση: Όλα τα αποτελέσματα έχουν μήκος τουλάχιστον 2. Είναι τα ΚΚ, ΓΓ (τα μόνα μήκους 2), ΓΚΚ, ΚΓΓ (τα μόνα μήκους 3), ΚΓΚΚ, ΓΚΓΓ (τα μόνα μήκους 4), κλπ, συν τα δύο άπειρα αποτελέσματα ΚΓΚΓΚΓ... και ΓΚΓΚΓΚΓΚ...

3. (α) Αν ρίξουμε ένα νόμισμα n φορές ποια είναι η πιθανότητα να μη φέρουμε καμία κορώνα;
(β) Αν ρίξουμε ένα νόμισμα άπειρες φορές (τη μια μετά την άλλη) ποια είναι η πιθανότητα να μη φέρουμε ποτέ κορώνα;

Αν ονομάσουμε E το ενδεχόμενο να μη φέρουμε ποτέ κορώνα και E_n το ενδεχόμενο να μη φέρουμε κορώνα μέχρι και τη n-οστή ρίψη, τότε $E \subseteq E_n$. Αυτός ο εγκλεισμός ενδεχομένων πολύ απλά σημαίνει ότι αν η έκβαση του πειράματος είναι τέτοια ώστε να ισχύει το E τότε θα ισχύει και το E_n. Χρησιμοποιήστε τώρα τη μονοτονία της συνολοσυνάρτησης πιθανότητας και το (α) του προβλήματος.

Λύση: Τα δυνατά αποτελέσματα σε n ρίψεις είναι 2^n και είναι όλα ισοπίθανα. Μόνο ένα από αυτά δεν έχει καμία κορώνα, άρα $\mathbb{P}[E_n] = 2^{-n}$. Έχουμε επίσης $\mathbb{P}[E] \le \mathbb{P}[E_n]$ για κάθε n από τη μονοτονία της πιθανότητας και τον εγκλεισμό $E \subseteq E_n$ (ο οποίος εγκλεισμός δεν είναι τίποτε άλλο από τη συνεπαγωγή «αν δε φέρω κορώνα σε άπειρες ρίψεις τότε δε φέρνω κορώνα και στις πρώτες n από αυτές»). Έχουμε δηλ.

$$0 \le \mathbb{P}[E] \le \mathbb{P}[E_n] = 2^{-n} \to 0,$$

άρα $\mathbb{P}[E] = 0$.

4. Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο X του συνόλου $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\text{Το } X \text{ είναι τέλειο τετράγωνο}] = 0.$$

Λύση: Όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα και έχουν συνεπώς πιθανότητα $1/n$. Τα τέλεια τετράγωνα από αυτά είναι το πολύ $\sqrt{n}$ στο πλήθος (και είναι ίσα με $\sqrt{n}$ στο πλήθος ακριβώς όταν το n είναι τέλειο τετράγωνο). Αν ονομάσουμε λοιπόν S το σύνολο των τετραγώνων στο $\{1, 2, \ldots, n\}$ τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{|S|}{n} \le \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

5. Στο δοχείο 1 περιέχονται 5 αριθμημένες μαύρες μπάλες και στο δοχείο 2 περιέχονται 10 αριθμημένες άσπρες μπάλες. Στο πείραμα Α επιλέγουμε πρώτα ένα από τα δοχεία στην τύχη και έπειτα από αυτό το δοχείο επιλέγουμε τυχαία μια από τις μπάλες του. Καταγράφουμε το αποτέλεσμα και επιστρέφουμε τη μπάλα στο δοχείο της. Ποιος ο δειγματικός χώρος του πειράματος και ποιες οι πιθανότητες των αποτελεσμάτων;

Λύση: Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο των 15 μπαλών αφού όλες μπορούν να προκύψουν. Για να προκύψει μια μαύρη μπάλα πρέπει στο πρώτο στάδιο του πειράματος να έχει επιλεγεί το πρώτο δοχείο, που συμβαίνει με πιθανότητα 1/2. Αφού επιλεγεί το πρώτο δοχείο όλες οι μπάλες του είναι εξίσου πιθανές να προκύψουν, άρα η κάθε μία έχει πιθανότητα 1/5. Αυτό πολλαπλασιάζεται με το 1/2 (της επιλογής του πρώτου κουτιού) άρα η πιθανότητα κάθε μάυρης μπάλας είναι 1/10 και, ομοίως, κάθε άσπρης είναι 1/20.

6. Σε ένα πείραμα ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο $\Omega = [1, +\infty)$. Με άλλα λόγια, τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι οι πραγματικοί αριθμοί ≥ 1. Η συνολοσυνάρτηση πιθανότητας πάνω στα ενδεχόμενα $E \subseteq \Omega$ είναι τέτοια ώστε αν το σύνολο E είναι ένα κλειστό διάστημα $E = [a, b]$ τότε

$$\mathbb{P}[E] = \int_a^b \frac{dt}{t^2}.$$

(1) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}[[1, x]]$, για $x \in \mathbb{R}$. Επίσης επιβεβαιώστε ότι $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

(2) Αν $A = \{x\}$ (το ενδεχόμενο A είναι το μονοσύνολο $\{x\}$, με $x \in \Omega$) τότε $\mathbb{P}[A] = 0$.

Χρησιμοποιήστε τη μονοτονία της συνολοσυνάρτησης πιθανότητας και το ότι $\{x\} \subseteq [x - \epsilon, x + \epsilon]$ για κάθε $\epsilon > 0$.

(3) Δείξτε ότι η πιθανότητα ενός διαστήματος (a, b) είναι πάντα ίδια με $\mathbb{P}[[a, b]]$, είτε τα άκρα συμπεριλαμβάνονται στο διάστημα είτε όχι.

Έχουμε την **ξένη** ένωση $[a, b] = \{a\} \cup (a, b) \cup \{b\}$, και χρησιμοποιήστε την προσθετικότητα της συνολοσυνάρτησης πιθανότητας.

(4) Δείξτε ότι $\mathbb{P}[\{1, 2, 3, \ldots\}] = 0$.

Λύση:

(1) $\mathbb{P}[[1,x]] = \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x}$. Αφού $1 \geq \mathbb{P}[\Omega] \geq \mathbb{P}[[1,x]] = 1 - \frac{1}{x}$ ισχύει για κάθε $x \geq 1$ και η τελευταία ποσότητα μπορεί να έρθει οσοδήποτε κοντά στο 1, έπεται ότι $\mathbb{P}[\Omega] = 1$, όπως πρέπει.

(2) Αφού $\{x\} \subseteq [x, x + \epsilon]$ έπεται

$$\mathbb{P}[\{x\}] \leq \mathbb{P}[[x, x+\epsilon]] = \int_x^{x+\epsilon} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{\epsilon}{x^2}$$

και το άνω όριο τείνει στο 0 για $\epsilon \to 0$, άρα $\mathbb{P}[\{x\}] = 0$.

(3) Αν I είναι το διάστημα (a, b) με οποιαδήποτε από τα δύο άκρα του μέσα στο I τότε από την προσθετικότητα της πιθανότητας έχουμε

$$\mathbb{P}[[a,b]] - \mathbb{P}[I] \leq \mathbb{P}[\{a\}] + \mathbb{P}[\{b\}] = 0.$$

(4) $\mathbb{P}[\{1,2,3,\ldots\}] = \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty}\{k\}] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[\{k\}] = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$.

7. Το καλοκαίρι έχει σχεδόν τελειώσει για τον πολύ κόσμο κι εσάς σας έχει μόλις προσλάβει μια σοβαρή εταιρεία δημοσκοπήσεων. Ένας μεγάλος πελάτης αυτής της εταιρείας ενδιαφέρεται να εκτιμήσει το ποσοστό του κόσμου που έχει απατήσει το/η σύντροφό του το καλοκαίρι που μας πέρασε.

Η εταιρεία δημοσκοπήσεων έχει μεγάλο πρόβλημα να πραγματοποιήσει αυτή τη δημοσκόπηση. Αν η εταιρεία μπορούσε να μαζέψει ένα τυχαίο δείγμα του κόσμου, π.χ. 10.000 άτομα, σε ένα χώρο, θα μπορούσε εύκολα να τους μοιράσει ανώνυμα ερωτηματολόγια. Οι ερωτούμενοι τότε, καλυπτόμενοι από την ανωνυμία, δε θα είχαν λόγο να απαντήσουν ψέματα και από τις απαντήσεις τους θα προέκυπτε εύκολα η εκτίμηση της πιθανότητας απιστίας ως το ποσοστό των θετικών απαντήσεων.

Όμως το να μαζέψει τόσο κόσμο είναι πολύ ακριβό και αυτή η μέθοδος είναι ανεφάρμοστη. Η εταιρεία δημοσκοπήσεων μπορεί όμως να βγάλει συνεργάτες της έξω οι οποίοι θα μπορούν να σταματάνε τυχαία κόσμο στο δρόμο (ή να επισκέπτονται κόσμο τυχαία στα σπίτια ή τις δουλειές τους) και να τους ρωτάνε. Και πάλι βέβαια, αν σας σταματήσει κάποιος στο δρόμο και σας κάνει τέτοια ερώτηση υπάρχει πιθανότητα ότι δε θα πείτε την αλήθεια (που ξέρετε αν αυτός που σας ρωτάει σας ξέρει ή όχι, κλπ).

Προτείνετε ένα τρόπο να συλλέξετε δεδομένα που θα σας οδηγήσουν στη σωστή εκτίμηση της πιθανότητας απιστίας. Πιο συγκεκριμένα, προτείνετε ένα τρόπο να απαντάει το τυχαίο άτομο μ' ένα ΝΑΙ ή ΟΧΙ, χρησιμοποιώντας κι ένα νόμισμα το οποίο μπορεί να ρίχνει όσες φορές θέλει και του οποίου το αποτέλεσμα μόνο αυτό το άτομο ξέρει. Από τις απαντήσεις αυτές θα πρέπει να μπορείτε να συνάγετε την εκτίμηση της πιθανότητας αλλά δε θα μπορείτε να βγάλετε ασφαλές συμπέρασμα για τις καλοκαιρινές δραστηριότητες κανενός ερωτούμενου. Επίσης αυτό το τελευταίο θα πρέπει να είναι προφανές στους ερωτούμενους. Υποθέτουμε ότι οι ερωτούμενοι δρουν καλόπιστα και ακολουθούν τις οδηγίες σας.

Λύση: Παραπέμπουμε στο `https://kolount.wordpress.com/2008/08/23/%CE%B5%CF%81%CE%B5%CF%85%CE%BD%CE%B1-%CE%AD%CF%87%CE%B5%CF%84%CE%B5-%CE%B1%CF%80%CE%B1%CF%84%CE%AE%CF%83%CE%B5%CE%B9-%CF%84%CE%B7%CE%BF-%CF%83%CF%8D%CE%BD%CF%84%CF%81%CE%BF%CF%86%CF%8C-%CF%83/`

8. Το παρακάτω πρόγραμμα σε `python` πραγματοποιεί N φορές ($N = 10000$ στο πρόγραμμα) μια προσομοίωση (simulation) του παιχνιδιού Monty Hall, όπως περιγράφεται στο Quiz 2 στο μάθημα.

Θεωρούμε ότι η σοκολάτα είναι πάντα στο κουτί 1 (ο παίκτης φυσικά δεν το ξέρει αυτό) και ο κάθε ένας από τους τρεις παίκτες (που παίζουν σε τρία διαφορετικά δωμάτια το παιχνίδι οπότε ο ένας δεν επηρεάζει τον άλλο) επιλέγει τυχαία ένα από τα κουτιά. Αφού αυτός που χειρίζεται το παιχνίδι τού αποκαλύψει ένα άδειο κουτί τότε ο καθένας από τους τρεις παίκτες αποφασίζει ποιο κουτί είναι η τελική του επιλογή σύμφωνα με την «κοσμοθεωρία» του: ο πρώτος παίκτης εμμένει πάντα στην αρχική του επιλογή, ο δεύτερος στρίβει ένα νόμισμα για να αποφασίσει αν θα αλλάξει και ο τρίτος πάντα αλλάζει.

Αν δεν έχετε `python 3` εγκατεστημένη τον υπολογιστή σας μπορείτε να τρέξετε αυτό το πρόγραμμα και να παίξετε με αυτό online, π.χ. στο `https://repl.it/@kolount/monty-hall-1`.

```
import random
N=10000 # Πλήθος φορών που εκτελούμε το πείραμα

counter_nochange = 0 # Πόσες φορές πήραμε τη σοκολάτα, αρχικά 0. Μιλάμε για ένα παίκτη που δεν αλλάζει.
counter_toss_a_coin = 0 # Πόσες φορές πήραμε τη σοκολάτα, αρχικά 0. Μιλάμε για ένα παίκτη που ρίχνει νόμισμα για να δει αν θα αλλάξει.
counter_change = 0 # Πόσες φορές πήραμε τη σοκολάτα, αρχικά 0. Μιλάμε για ένα παίκτη που πάντα αλλάζει.

for i in range(N): # Εκτελούμε N φορές το πείραμα.
    box = random.randint(1,3) # Επιλέγει ο παίκτης τυχαία ένα κουτί και το δείχνει. Η σοκολάτα είναι πάντα στο 1.

    # Εδώ αποφασίζουμε ποιο κουτί θα παραμείνει κλειστό, πέρα από αυτό που έδειξε ο παίκτης
    if box==1: noshow = 2
    if box==2: noshow = 1
    if box==3: noshow = 1

    # Εδώ υπολογίζουμε το ποιο κουτί είναι η τελική επιλογή του παίκτη
    newbox_nochange = box
    if random.randint(0,1)==0:
        newbox_toss_a_coin = box # Ο παίκτης ρίχνει νόμισμα για να δει αν θα αλλάξει ή όχι
    else:
        newbox_toss_a_coin = noshow
    newbox_change = noshow

    # Εδώ υπολογίζουμε αν βρήκαμε τη σοκολάτα και, αν ναι, αυξάνουμε το μετρητή του παίκτη
    if newbox_nochange==1: counter_nochange += 1
    if newbox_toss_a_coin==1: counter_toss_a_coin += 1
    if newbox_change==1: counter_change += 1

frequency_nochange = counter_nochange/N # με τι συχνότητα πήραμε τη σοκολάτα
frequency_toss_a_coin = counter_toss_a_coin/N # με τι συχνότητα πήραμε τη σοκολάτα
frequency_change = counter_change/N # με τι συχνότητα πήραμε τη σοκολάτα

print("Ο παίκτης που δεν αλλάζει ποτέ κέρδισε με συχνότητα {}".format(frequency_nochange))
print("Ο παίκτης που ρίχνει νόμισμα για να αλλάξει κέρδισε με συχνότητα {}".format(frequency_toss_a_coin))
print("Ο παίκτης που πάντα αλλάζει κέρδισε με συχνότητα {}".format(frequency_change))
```

Ένα τυπικό output του προγράμματος είναι π.χ.

```
Ο παίκτης που δεν αλλάζει ποτέ κέρδισε με συχνότητα 0.3302
Ο παίκτης που ρίχνει νόμισμα για να αλλάξει κέρδισε με συχνότητα 0.4909
Ο παίκτης που πάντα αλλάζει κέρδισε με συχνότητα 0.6698
```