Πιθανοτητες – Άνοιξη 2020-21

Λύσεις των ασκήσεων

1. Σε ένα κουτί μέσα βρίσκονται τρείς βώλοι, ένας κόκκινος, ένας πράσινος κι ένας μπλέ. Το πείραμά μας συνίσταται στο να τραβήξουμε ένα βώλο, να σημειώσουμε το χρώμα του, να τον επανατοποθετήσουμε μέσα στο κουτί, να τραβήξουμε πάλι ένα βώλο και να σημειώσουμε και αυτού το χρώμα.

(1) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος; Ποια η κατανομή πιθανότητας στα στοιχεία του αν όλοι οι βώλοι που είναι μέσα στο κουτί είναι εξίσου πιθανό να τραβηχτούν κάθε φορά;
(2) Απαντήστε στο ίδιο ερώτημα αν το πείραμα τροποιηθεί ως εξής: αφού τραβήξουμε πρώτο βώλο, *δεν τον επανατοποθετούμε στο κουτί*, αλλά απλά τραβάμε και τον δεύτερο από τους δύο εναπομείναντες.

Λύση:

(1) Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (c_1, c_2) που μπορεί να σχηματίσει κανείς με $c_1, c_2 \in C = \{\text{κόκκινο}, \text{πράσινο}, \text{μπλε}\}$. Με άλλα λόγια πρόκειται για το *καρτεσιανό γινόμενο* $C \times C$. Έχει $|C|^2 = 3^2 = 9$ στοιχεία.
(2) Η διαφορά με πριν είναι ότι δε μπορούμε να πάρουμε ζεύγη της μορφής (c, c). Αυτά είναι τρία στο πλήθος άρα ο δειγματικός χώρος σε αυτό το πείραμα είναι αυτός του προηγουμένου χωρίς τα τρία αυτά στοιχεία με ίσα μέλη. Άρα έχει 6 στοιχεία.

Για λόγους συμμετρίας και στις δύο περιπτώσεις η κατανομή πιθανότητας στα στοιχεία του δειγματικού χώρου είναι η ομοιόμορφη, όλα τα αποτελέσματα δηλ. έχουν την ίδια πιθανότητα (1/9 στην πρώτη περίπτωση και 1/6 στη δεύτερη).

Στα παραπάνω έχει γίνει η έμμεση παραδοχή ότι τα δύο χρώματα που τραβάμε τα καταγράφουμε με τη σειρά τους. Μπορούμε δηλ. να ξεχωρίσουμε το αποτέλεσμα (κόκκινο, μπλε) από το αποτέλεσμα (μπλε, κόκκινο). Αν δεν κάνουμε αυτή την παραδοχή τότε τα αποτελέσματά μας είναι μη διατεταγμένα ζεύγη. Στη δεύτερη περίπτωση αυτά είναι ακριβώς όλα τα διμελή υποσύνολα του C, των οποίων το πλήθος είναι 3. Στην πρώτη περίπτωση πρέπει στα μη διατεταγμένα ζεύγη της περίπτωσης δύο να προσθέσουμε και τα τρία ζεύγη (κόκκινο, κόκκινο), (πράσινο, πράσινο) κα (μπλε, μπλε), οπότε έχουμε 6 στοιχεία. Και πάλι θα είχαμε την ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας.

2. Ρίχνουμε ζεύγος τίμιων ζαριών.

(1) Ποια τα στοιχεία του ενδεχομένου «τα δυο αποτελέσματα έχουν άθροισμα 4»;
(2) Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού;

Λύση: Ο δειγματικός χώρος είναι όλα τα ζεύγη (x, y) με $x, y \in H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, είναι δηλ. το καρτεσιανό γινόμενο $H \times H$. Το ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει είναι εκείνα τα ζεύγη για τα οποία ικανοποιείται η συνθήκη $x + y = 4$, είναι δηλ. το σύνολο

$$\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}.$$

Όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα και έχουν συνεπώς πιθανότητα 1/36 αφού το μέγεθος του δειγματικού χώρου είναι 36. Άρα το ενδεχόμενό μας έχει πιθανότητα $3/36 = 1/12$.

3. Αν A, B ενδεχόμενα δείξτε ότι

(1) $\mathbb{P}[A\triangle B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - 2\mathbb{P}[A \cap B]$
(2) $|\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B]| \le \mathbb{P}[A\triangle B]$

Εδώ $A\triangle B$ είναι η συμμετρική διαφορά των A και B, τα στοιχεία δηλ. του δειγματικού χώρου που ανήκουν ακριβώς σε ένα από τα A, B. Με άλλα λόγια $A\triangle B$ είναι το ενδεχόμενο να συμβαίνει το A και όχι το B ή να συμβαίνει το B και όχι το A.

Λύση: Με $\uplus$ συμβολίζουμε την ξένη ένωση δύο συνόλων (τα σύνολα που ενώνουμε δηλ. δηλώνουμε ότι είναι ξένα).

(1) Έχουμε κατ' αρχήν $A \cup B = (A\triangle B) \uplus (A \cap B)$ άρα, από την προσθετικότητα της πιθανότητας, έχουμε

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A\triangle B] + \mathbb{P}[A \cap B].$$

Έχουμε επίσης τη γνωστή σχέση «εγκλεισμού–εποκλεισμού»

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B].$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη αυτών των δύο παίρνουμε το ζητούμενο.

(2) Έχουμε $A \subseteq (A\triangle B) \cup B$ και $B \subseteq (A\triangle B) \cup A$. Από την υποπροσθετικότητα της πιθανότητας παίρνουμε $\mathbb{P}[A] \le \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A\triangle B]$ και $\mathbb{P}[B] \le \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[A\triangle B]$. Αυτές γίνονται

$$\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B] \le \mathbb{P}[A\triangle B] \text{ και } \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A] \le \mathbb{P}[A\triangle B],$$

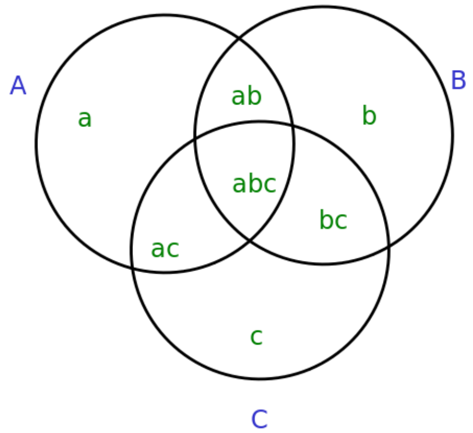
που είναι ακριβώς το ζητούμενο.

4. Αν A, B, C ενδεχόμενα δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[B \cap C] - \mathbb{P}[C \cap A] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C].$$

Ξεκινήστε κάνοντας ένα διάγραμμα Venn για τρία σύνολα.

Λύση: Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται τα τρία σύνολα A, B, C σε «γενική θέση» (δεν κάνουμε δηλ. καμία υπόθεση για τις μεταξύ τους τομές). Για συντομία στο συμβολισμό έχουμε δώσει τα ονόμα abc, ab, bc, ab, a, b, c στα **ξένα μεταξύ τους** χωρία που φαίνονται, όπου το νόημα του ονόματος είναι να μας δείξει ακριβώς μέσα σε ποια σύνολα A, B, C είμαστε. Π.χ. το σύνολο ab είναι εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν στο A και στο B και όχι στο C, ενώ abc είναι εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν σε όλα, κλπ. Για ακόμη μεγαλύτερη απλότητα συμβολίζουμε με τα ίδια σύμβολα και τις αντίστοιχες πιθανότητες. Έτσι ab είναι και το σύνολο $A \cap B \cap C^c$ αλλά και η πιθανότητά του.



Η στρατηγική μας τώρα είναι απλή αν και λίγο βαρετή. Γράφουμε όλες τις πιθανότητες που εμφανίζονται στην προς απόδειξη σχέση μέσω των $abc, bc, \ldots$ και ελέγχουμε ότι παίρνουμε μια ισότητα (απλοποιούνται τα πάντα). Έτσι το αριστερό μέλος είναι

$$\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = a + b + c + ab + ac + bc + abc$$

ενώ για το δεξί μέλος χρησιμοποιούμε τις αντικαταστάσεις

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A] &= a + ab + ac + abc \\
\mathbb{P}[B] &= b + ab + bc + abc \\
\mathbb{P}[C] &= c + ac + bc + abc \\
\mathbb{P}[A \cap B] &= ab + abc \\
\mathbb{P}[B \cap C] &= bc + abc \\
\mathbb{P}[C \cap A] &= ac + abc \\
\mathbb{P}[A \cap B \cap C] &= abc.
\end{aligned}$$

5. Έστω A, B ενδεχόμενα σε χώρο πιθανότητας με $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 0$.

(1) Δείξτε ότι $\mathbb{P}[A \cup B] = 0$.

(2) Γενικεύστε το σε παραπάνω από δύο ενδεχόμενα, ακόμη και σε άπειρη ακολουθία σχεδόν αδύνατων ενδεχομένων (με πιθανότητα 0 το καθένα δηλ.).

Λύση:

(1) Έχουμε από την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας $0 \le \mathbb{P}[A \cup B] \le \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] = 0 + 0 = 0$.

(2) Αν $A_1, A_2, \ldots$ (A_n με $n = 1, 2, \ldots$) είναι ενδεχόμενα με πιθανότητα 0 τότε και η ένωσή τους έχει πιθανότητα 0. Από την υποπροσθετικότητα και πάλι έχουμε

$$0 \le \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

6. Έστω ακολουθία ενδεχομένων E_k, $k \ge 1$, σε ένα δειγματικό χώρο Ω με συνολοσυνάρτηση πιθανότητας $\mathbb{P}[\cdot]$. Υποθέστε ότι $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[E_k] = 0$. Δείξτε ότι το ενδεχόμενο $E = \bigcap_{k \ge 1} E_k$ (το ενδεχόμενο δηλ. να ισχύουν όλα τα E_k, $k \ge 1$) είναι σχεδόν αδύνατο, ισχύει δηλ. $\mathbb{P}[E] = 0$.

Χρησιμοποιείστε τη μονοτονία της συνολοσυνάρτησης πιθανότητας, ότι δηλ. αν $A \subseteq B$ είναι δύο ενδεχόμενα τότε $\mathbb{P}[A] \le \mathbb{P}[B]$. Κάντε επίσης την παρατήρηση ότι $E \subseteq E_k$ για κάθε φυσικό αριθμό k.

Λύση: Αφού $E \subseteq E_k$ τότε $0 \le \mathbb{P}[E] \le \mathbb{P}[E_k]$ από τη μονοτονία της πιθανότητας και αυτό ισχύει για κάθε k. Παίρνοντας $k \to \infty$ έχουμε από την υπόθεσή μας ότι $\mathbb{P}[E_k] \to 0$ άρα έχουμε $\mathbb{P}[E] = 0$.

7. Έστω σχεδόν σίγουρα ενδεχόμενα E_k, $k \ge 1$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathbb{P}[E_k] = 1$ για κάθε $k \ge 1$.
Δείξτε ότι σχεδόν σίγουρα ισχύουν όλα τα E_k. Με άλλα λόγια δείξτε ότι $\mathbb{P}\left[\bigcap_{k\ge1} E_k\right] = 1$.

Δείξτε ότι $\mathbb{P}\left[\left(\bigcap_{k\ge1} E_k\right)^c\right] = 0$. Με βάση τους κανόνες του de Morgan ισχύει

$$\left(\bigcap_{k\ge1} E_k\right)^c = \bigcup_{k\ge1} E_k^c.$$

Άρα $\mathbb{P}\left[\left(\bigcap_{k\ge1} E_k\right)^c\right] \le \sum_{k\ge1} \mathbb{P}[E_k^c]$ από την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας της πιθανότητας.

Λύση: Συνεχίζουμε όπως λέει η υπόδειξη.

$$\mathbb{P}\left[\left(\bigcap_{k\ge1} E_k\right)^c\right] \le \sum_{k\ge1} \mathbb{P}[E_k^c] = \sum_{k\ge1}(1 - \mathbb{P}[E_k]) = \sum_{k\ge1} 0 = 0.$$

Αφού λοιπόν η πιθανότητα του συμπληρώματος του $\bigcap_{k\ge1} E_k$ είναι 0, έπεται ότι η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου είναι 1.

8. Έστω ενδεχόμενα A_k, $k \ge 1$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα $\limsup_k A_k$ και $\liminf_k A_k$ ως εξής:

$$\limsup_k A_k = \bigcap_{k\ge1} \bigcup_{n\ge k} A_n \text{ και } \liminf_k A_k = \bigcup_{k\ge1} \bigcap_{n\ge k} A_n.$$

Δείξτε ότι το ενδεχόμενο $\limsup_k A_k$ ισχύει ακριβώς όταν ισχύουν άπειρα από τα A_k και το ενδεχόμενο $\liminf_k A_k$ ακριβώς όταν ισχύουν *τελικά* όλα τα A_k, όταν δηλ. υπάρχει κάποιο k_0 ώστε να ισχύουν όλα τα A_k, $k \ge k_0$.

Λύση: Για να ανήκει ένα στοιχείο x στο $\limsup A_k$ πρέπει για κάθε $k \ge 1$ να ανήκει στο σύνολο $R_k = \bigcup_{n\ge k} A_n$. Με άλλα λόγια πρέπει για κάθε $k \ge 1$ το x να ανήκει σε κάποιο σύνολο από το A_k και μετά. Αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν το x ανήκει σε άπειρα από τα A_k. Αν το x ανήκει σε άπειρα A_k τότε η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και, αντίστροφα, αν ισχύει η παραπάνω ιδιότητα το x δε μπορεί να ανήκει σε πεπερασμένα μόνο από τα A_k γιατί επιλέγοντας τότε το k αρκετά μεγάλο θα βλέπαμε ότι η ιδιότητα αυτή δε θα ίσχυε.

Για να ανήκει ένα στοιχείο y στο $\liminf A_k$ θα πρέπει να ανήκει σε κάποιο από τα σύνολο $T_k = \bigcap_{n\ge k}$. Θα πρέπει δηλ. να ανήκει σε όλα τα A_k από κάποιο k_0 και μετά, να ανήκει δηλ. «τελικά» σε όλα τα A_k όπως λέμε.

9. Το παρακάτω πρόγραμμα σε `python` πραγματοποιεί N φορές ($= 1000$ στο πρόγραμμα) το εξής πείραμα. Ρίχνει δύο ζάρια και μετράει το πόσες φορές ισχύει το ενδεχόμενο να είναι ίσα τα δύο αποτελέσματα. Η συχνότητα του πότε συμβαίνει αυτό (πόσες φορές συνέβη διαιρεμένο με το N) είναι ακριβώς η έννοια που προσπαθεί να «πιάσει» η πιθανότητα ενός ενδεχομένου. Αν τρέξετε το πρόγραμμα μερικές φορές θα δείτε ότι κάθε φορά βγάζει και άλλο αποτέλεσμα, αλλά όλα είναι «κοντά» στο σωστό αριθμό $1/6 = 0.1666$. Θα παρατηρήσετε ότι όσο αυξάνετε το N (αριθμός επαναλήψεων του πειράματος) τόσο λιγότερο κυμαίνεται η συχνότητα που υπολογίζει το πρόγραμμα από τον αριθμό 1/6. Αυτό είναι που ονομάζουμε «Νόμο των μεγάλων αριθμών», που θα έχουμε την ευκαιρία να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε αργότερα.

Αν δεν έχετε `python 3` εγκατεστημένη τον υπολογιστή σας μπορείτε να τρέξετε αυτό το πρόγραμμα και να παίξετε με αυτό online, π.χ. στο `https://repl.it/L2lz/0`

```python
import random
N=1000 # Πλήθος φορών που εκτελούμε το πείραμα
counter=0 # Πόσες φορές συνέβη το ενδεχόμενο που κοιτάμε, αρχικά 0
for i in range(N): # εκτελούμε N φορές το πείραμα: ρίχνουμε δύο ζάρια και κοιτάμε πότε τα δύο αποτελέσματα είναι ίδια
    x = random.randint(1,6); y = random.randint(1,6) # εδώ παράγουμε δύο τυχαίους ακεραίους από 1 έως 6
    if x==y: # το ενδεχόμενο ισχύει
        counter += 1 # αυξάνουμε το μετρητή κατά 1
frequency = counter/N # με τι συχνότητα συνέβη το ενδεχόμενο αυτό
```

```python
print("Το ενδεχόμενο συνέβη με συχνότητα {}".format(frequency))
```