Πιθανοτητες – Άνοιξη 2020-21

Λύσεις των ασκήσεων

1. Όπως ορίζουμε την $\mathbb{E}[X|Y]$ μπορούμε και να ορίσουμε την $\mathbb{E}[X|Y,Z]$ ή και να δεσμεύσουμε ως προς μεγαλύτερο πλήθος ΤΜ. Το αποτέλεσμα είναι μια συνάρτηση των Y,Z που παριστάνει τη μέση τιμή της X υπό τη δέσμευση ότι γνωρίζουμε τις τιμές των Y,Z. Δώστε τον ακριβή ορισμό της $\mathbb{E}[X|Y,Z]$ για διακριτές μεταβλητές X,Y,Z.

Λύση: Επαναλαμβάνουμε τον ορισμό της $\mathbb{E}[X]$ αλλά με όλες τις πιθανότητες να είναι δεσμευμένες. Έτσι η ποσότητα $\mathbb{E}[X|Y,Z]$ ορίζεται να είναι μια συνάρτηση των Y,Z

$$\mathbb{E}[X|Y,Z] = \phi(Y,Z),$$

όπου

$$\phi(y,z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\cdot \mathbb{P}[X=k|Y=y,Z=z],$$

όταν φυσικά η σειρά αυτή συγκλίνει.

2. Αν X_n, $n=1,2,\ldots$, είναι μια ακολουθία ΤΜ (που έχουν μέση τιμή) λέμε ότι η ακολουθία αυτή είναι martingale αν ισχύει

$$\mathbb{E}[X_n|X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}] = X_{n-1},\ \text{για } n=2,3,\ldots.$$

Αν $Y_1,Y_2,\ldots$ είναι μια ακολουθία ανεξαρτήτων ΤΜ με $\mathbb{E}[Y_j]=0$ για κάθε j και $X_n = Y_1+\cdots+Y_n$ δείξτε ότι η ακολουθία X_n είναι martingale.

Λύση: Πρέπει να επαληθεύσουμε την ιδιότητα που ορίζει ένα martingale. Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n|X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}] &= \mathbb{E}[Y_n+X_{n-1}|X_1,\ldots,X_{n-1}]\\ &= \mathbb{E}[Y_n|X_1,\ldots,X_{n-1}] + \mathbb{E}[X_{n-1}|X_1,\ldots,X_{n-1}]\\ &= \mathbb{E}[Y_n] + X_{n-1} \text{ (λόγω ανεξαρτησίας το πρώτο)}\\ &= X_{n-1} \text{ (αφού } \mathbb{E}[Y_n]=0).\end{aligned}$$

3. Κάποιος μπαίνει σε ένα καζίνο που έχει μέσα τυχερά παιχνίδια. Όλα τα παιχνίδια είναι τίμια, δηλ. αν ο παίχτης βάλει στο παιχνίδι x ευρώ τότε η μέση τιμή των χρημάτων που παίρνει είναι πάλι x ευρώ.

Ας είναι X_0 το ποσό χρημάτων που έχει μαζί του στην αρχή, X_1 το πόσα έχει μετά που παίζει το πρώτο παιχνίδι, X_2 όσα έχει μετά το δεύτερο, κλπ. Δεν κάνουμε καμιά υπόθεση ούτε για το πόσα χρήματα ποντάρει κάθε φορά ούτε για το τι παιχνίδι παίζει. Μπορεί, π.χ., ανάλογα με το πώς πάει το ένα παιχνίδι να αποφασίζει ποιο θα είναι το επόμενο παιχνίδι και πόσα χρήματα να ποντάρει σε αυτό. (Οπότε δεν υπάρχει ανεξαρτησία στην έκβαση ενός παιχνιδιού με τα προηγούμενα.)

Δείξτε ότι η ακολουθία X_n είναι martingale.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε $\mathbb{E}[X_n|X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}] = X_{n-1}$. Αν γνωρίζουμε δηλ. τις ποσότητες $X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}$ τότε πρέπει να δείξουμε ότι η μέση τιμή της X_n (γνωρίζοντας) τις ποσότητες αυτές είναι η τιμή της X_{n-1}. Όμως αυτό δεν είναι τίποτε άλλο από το γεγονός ότι το n-οστό παιχνίδι που παίζει ο παίχτης είναι τίμιο και κατά μέσο όρο κερδίζει 0, άρα, μετά από αυτό το παιχνίδι, θα έχει κατά μέσο όρο τόσα χρήματα όσα είχε και πριν το παίξει, δηλ. X_{n-1}.

4. Σε ένα σακί περιέχονται 2 άσπρες μπάλες και μια μαύρη. Δύο άτομα τραβούν, ο ένας μετά τον άλλο και μόνο μια φορά, μια μπάλα από το σακί, χωρίς επανάθεση. Κερδίζει 1 ευρώ όποιος τραβήξει τη μαύρη μπάλα. Δείξτε ότι δεν έχει σημασία ποιος παίζει πρώτος (το μέσο κέρδος δηλ. των δύο παικτών είναι το ίδιο).

Λύση: Το μέσο κέρδος του πρώτου είναι προφανώς 1/3. Αν συμβολίσουμε με F το ενδεχόμενο να τραβήξει ο πρώτος τη μαύρη μπάλα και με X το κέρδος του δεύτερου τότε

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|F]\,\mathbb{P}[F] + \mathbb{E}[X|F^c]\,\mathbb{P}[F^c] = 0\cdot\mathbb{P}[F] + \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

5. Ας είναι X,Y,Z διακριτές ΤΜ που παίρνουν πεπερασμένες στο πλήθος τιμές η κάθε μία (αυτό συνεπάγεται ότι όλες οι παρακάτω μέσες τιμές υπάρχουν). Δείξτε τις παρακάτω γενικεύσεις του νόμου «ολικής μέσης τιμής» $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$.

(1) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|X,Y]]$

(2) $\mathbb{E}\left[Z|X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Z|X,Y\right]|X\right]$
(3) $\mathbb{E}\left[Z\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Z|X,Y\right]|X\right]\right]$

Λύση:

(1) Αυτό είναι ουσιαστικά το ίδιο με το νόμο «ολικής μέσης τιμής» $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|Y\right]\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$, αν απλά θεωρήσουμε ότι η ΤΜ Y ως προς την οποία δεσμεύουμε είναι το διάνυσμα (Y, Z). Δεν υπάρχει καμία απαίτηση οι τιμές ως προς τις οποίες δεσμεύουμε να είναι αριθμοί (μόνο αυτές των οποίων τη μέση τιμή παίρνουμε).

(2) Το αριστερό και το δεξί μέλος στην

$$\mathbb{E}\left[Z|X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Z|X,Y\right]|X\right]$$

είναι και τα δυό συναρτήσεις του X άρα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε x (το x διατρέχει τις τιμές του X, το y τις τιμές του Y και το z τις τιμές του Z) το αριστερό και το δεξί μέλος είναι ίσα.

Το αριστερό μέλος ισούται με

$$\mathbb{E}\left[Z|X=x\right] = \sum_z z\mathbb{P}\left[Z=z|X=x\right]. \tag{1}$$

ενώ ΤΜ $\mathbb{E}\left[Z|X,Y\right]$ περιορισμένη στο ενδεχόμενο $\{X=x, Y=y\}$ ισούται με

$$\mathbb{E}\left[Z|X,Y\right] = \sum_z z\mathbb{P}\left[Z=z|X=x,Y=y\right].$$

Άρα η ΤΜ $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Z|X,Y\right]|X\right]$ στο ενδεχόμενο $\{X=x\}$ ισούται με

$$\begin{aligned}\sum_y\sum_z z\mathbb{P}\left[Z=z|X=x,Y=y\right]\mathbb{P}\left[Y=y|X=x\right] &= \sum_z z\sum_y \mathbb{P}\left[Z=z|X=x,Y=y\right]\mathbb{P}\left[Y=y|X=x\right]\\ &= \sum_z z\mathbb{P}\left[Z=z|X=x\right]. \qquad (2)\end{aligned}$$

Έχουμε δείξει ότι τα (1), (2) είναι ίσα.

(3) Εφαρμόζουμε τον τύπο $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[A|B\right]\right] = \mathbb{E}\left[A\right]$ στο προηγούμενο.

6. Η ΤΜ X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $\{1, 2, \ldots, 100\}$ και η ΤΜ Y είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $\{1, 2, \ldots, X\}$. Ποια η μέση τιμή της Y;

Λύση: Έχουμε κατ' αρχήν $\mathbb{E}\left[Y|X\right] = \frac{1+X}{2}$.

Έπειτα

$$\mathbb{E}\left[Y\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y|X\right]\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1+X}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1+100}{2} = \frac{103}{4} = 25.75.$$