Λύσεις των ασκήσεων

1. Ας υποθέσουμε ότι η ΤΜ Y είναι πάντα $\le B$. Δείξτε ότι αν $a < B$ ισχύει

$$\mathbb{P}[Y \le a] \le \frac{\mathbb{E}[B-Y]}{B-a}.$$

Λύση: Από την υπόθεση έχουμε $B - Y \ge 0$, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Markov για την ΤΜ $B - Y$. Έχουμε

$$\mathbb{P}[Y \le a] = \mathbb{P}[B - Y \ge B - a] \le \frac{\mathbb{E}[B-Y]}{B-a}.$$

2. Η ΤΜ X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 10]$. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της καθώς και την πιθανότητα $\mathbb{P}[X \ge 8]$. Έπειτα βρείτε τα άνω φράγματα γι' αυτή την πιθανότητα που προκύπτουν από τις ανισότητες Markov και Chebyshev.

Λύση: Λόγω συμμετρίας η μέση τιμή είναι ακριβώς 5. Έχουμε επίσης

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^{10} \frac{1}{10} x^2\,dx = \frac{1}{10}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{10} = \frac{1}{10}\frac{10^3}{3} = \frac{100}{3},$$

άρα

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{100}{3} - 25 = \frac{25}{3}.$$

Επίσης

$$\mathbb{P}[X \ge 8] = \int_8^{10} f_X(x)\,dx = \frac{1}{10}\cdot 2 = \frac{1}{5}.$$

Από την ανισότητα Markov έχουμε

$$\mathbb{P}[X \ge 8] \le \frac{\mathbb{E}[X]}{8} = \frac{5}{8} = 0.625,$$

ενώ από την ανισότητα Chebyshev έχουμε (το 1/2 λόγω της συμμετρίας της κατανομής γύρω από το 5)

$$\mathbb{P}[X \ge 8] = \frac{1}{2}\mathbb{P}[|X-5| \ge 3] \le \frac{1}{2}\frac{\sigma^2(X)}{9} = \frac{25}{54} = 0.4629.$$

3. Η ΤΜ X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 1, δηλ. $f_X(t) = \mathbb{1}(t \ge 0)\, e^{-t}$. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της καθώς και την πιθανότητα $\mathbb{P}[X \ge 3]$. Έπειτα βρείτε τα άνω φράγματα γι' αυτή την πιθανότητα που προκύπτουν από τις ανισότητες Markov και Chebyshev.

Λύση: Έχουμε (με ολοκλήρωση κατά μέρη)

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} te^{-t}\,dt = \int_0^{\infty} t(-e^{-t})'\,dt = \left.-te^{-t}\right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = 0 - \int_0^{\infty} (e^{-t})'\,dt = 1,$$

και

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_0^{\infty} t^2 e^{-t}\,dt = \int_0^{\infty} t^2(-e^{-t})'\,dt = \left.-t^2e^{-t}\right|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} te^{-t}\,dt = 0 + 2 = 2,$$

άρα $\sigma^2(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = 2 - 1^2 = 1$.

Έχουμε επίσης

$$\mathbb{P}[X \ge 3] = \int_3^{\infty} e^{-t}\,dt = \left.-e^{-t}\right|_3^{\infty} = e^{-3} = 0.049787.$$

Από την ανισότητα Markov παίρνουμε

$$\mathbb{P}[X \ge 3] \le \frac{\mathbb{E}[X]}{3} = \frac{1}{3} = 0.3333,$$

και από την ανισότητα Chabyshev έχουμε (λαμβάνοντας υπόψιν ότι πάντα $X \ge 0$)

$$\mathbb{P}[X \ge 3] = \mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \ge 2] \le \frac{\sigma^2(X)}{4} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

4. Η ΤΜ X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $B(n,p)$. Αν $p<\alpha<1$ βρείτε ένα άνω φράγμα, με την ανισότητα Markov, για την $\mathbb{P}[X\ge \alpha n]$ και υπολογίστε το για $p=1/2$ και $\alpha=3/4$.

Λύση: Έχουμε $\mathbb{E}[X]=pn$ άρα εφαρμόζοντας την ανισότητα του Markov παίρνουμε (για $p=1/2$ και $\alpha=3/4$)

$$\mathbb{P}[X\ge \alpha n]=\mathbb{P}\left[X\ge \frac{\alpha}{p}pn\right]\le \frac{p}{\alpha}=\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}.$$

5. Επαναλάβετε το Πρόβλημα 4 αλλά τώρα χρησιμοποιείστε την ανισότητα Chebyshev.

Λύση: Για $p=1/2$ η κατανομή της X είναι συμμετρική γύρω από την μέση τιμή της $n/2$ άρα

$$\mathbb{P}\left[X\le \frac{3}{4}n\right]=\frac{1}{2}\mathbb{P}\left[|X-\mathbb{E}[X]|\ge \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)n\right]=\frac{1}{2}\mathbb{P}\left[|X-\mathbb{E}[X]|\ge \frac{1}{4}n\right]\le \frac{\sigma^2(X)}{n^2/16},$$

Αλλά $\sigma^2(X)=np(1-p)=n/4$ άρα το άνω φράγμα που παίρνουμε τώρα είναι $4/n$.

6. Έστω k φυσικός αριθμός και υποθέστε ότι υπάρχει η μέση τιμή $M=\mathbb{E}\left[|X-\mu|^k\right]$ για την ΤΜ X με μέση τιμή $\mu=\mathbb{E}[X]$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[|X-\mu|\ge\lambda]\le\frac{M}{\lambda^k},$$

για $\lambda>0$.

Λύση:

$$\mathbb{P}[|X-\mu|\ge\lambda]=\mathbb{P}\left[|X-\mu|^k\ge\lambda^k\right]\le\frac{\mathbb{E}\left[|X-\mu|^k\right]}{\lambda^k}=\frac{M}{\lambda^k}.$$

7. Έστω X μια ΤΜ με $\mathbb{E}[X]=\mu$ και $\sigma^2(X)=\sigma^2$ και ας είναι $a>0$. Δείξτε τις ανισότητες

$$\mathbb{P}[X\ge\mu+a]\le\frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2},\quad \mathbb{P}[X\le\mu-a]\le\frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}.$$

Ορίστε την ΤΜ $Y=X-\mu$ που έχει μέση τιμή 0 και $\sigma^2(Y)=\sigma^2$. Αν t είναι μια πραγματική παράμετρος, $t>-a$, βρείτε άνω φράγμα για την πιθανότητα

$$\mathbb{P}[Y\ge a]=\mathbb{P}[Y+t\ge a+t]=\mathbb{P}\left[\frac{Y+t}{a+t}\ge 1\right]$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov. Το φράγμα αυτό ισχύει για κάθε t οπότε αυτό που απομένει να γίνει είναι να επιλέξετε εκείνο το t που δίνει το μικρότερο άνω φράγμα.

Λύση: Ακολουθούμε την υπόθεση αλλά τετραγωνίζουμε και στο τέλος ώστε να εκμεταλλευτούμε την πληροφορία που έχουμε για τη διασπορά. Έτσι έχουμε (προσέξτε ότι $a+t>0$)

$$\mathbb{P}[Y\ge a]=\mathbb{P}[Y+t\ge a+t]=\mathbb{P}\left[\frac{Y+t}{a+t}\ge 1\right]=\mathbb{P}\left[\frac{(Y+t)^2}{(a+t)^2}\ge 1\right]\le\mathbb{E}\left[\frac{(Y+t)^2}{(a+t)^2}\right]=\frac{\sigma^2+t^2}{(a+t)^2}.$$

Η ανισότητα που έχουμε αποδείξει

$$\mathbb{P}[Y\ge a]\le\frac{\sigma^2+t^2}{(a+t)^2}$$

ισχύει για οποιδήποτε $t>-a$, άρα επιλέγουμε εκείνο το t που ελαχιστοποιεί το δεξί μέλος, που είναι το $t=\sigma^2/a$ οπότε παίρνουμε ως δεξί μέλος την ποσότητα

$$\frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2},$$

που είναι η επιθυμητή. Η άλλη ανισότητα αποδεικνύεται ομοίως ή εφαρμόζοντας την προηγούμενη για την ΤΜ $-X$ στη θέση της X.

8. Αν X είναι μια πραγματική ΤΜ η *ροπογεννήτρια συνάρτηση της X* είναι η συνάρτηση

$$M_X(t)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right],\quad \text{για τα } t\in\mathbb{R} \text{ για τα οποία υπάρχει η μέση τιμή.}$$

(1) Παρατηρείστε ότι αν η X είναι φραγμένη (ικανοποιεί δηλ. $|X|\le B$ για κάποιο $B>0$) τότε η $M_X(t)$ ορίζεται για όλα τα X. Μπορείτε να υποθέσετε γνωστό ότι η μέση τιμή μιας φραγμένης ΤΜ υπάρχει.

(2) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτησης μιας ΤΜ X που ακολουθεί κατανομή Bernoulli με παράμετρο p (αυτό σημαίνει ότι $X = 1$ με πιθανότητα p και $X = 0$ με πιθανότητα $1 - p$). Το ίδιο για μια ΤΜ που ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p.

(3) Υποθέστε ότι η ΤΜ X είναι τέτοια ώστε η ροπογεννήτριά της να υπάρχει για όλα τα $t \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ που συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, και υποθέτοντας ότι η γραμμικότητα της μέσης τιμής ισχύει και για άπειρες σειρές (σε αυτή την περίπτωση ισχύει) όπως επίσης και ότι μπορείτε να παραγωγίσετε μια δυναμοσειρά κατά όρους δείξτε ότι

$$M_X(0) = 1,\ M'_X(0) = \mathbb{E}[X],\ M''_X(0) = \mathbb{E}\left[X^2\right], \ldots.$$

(4) Αν $S = X_1 + \cdots + X_n$ και οι $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες δείξτε ότι

$$M_S(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t).$$

Χρησιμοποιείστε αυτό για να υπολογίσετε ξανά τη ροπογεννήτρια της διωνυμικής κατανομής μέσω της ροπογεννήτριας της κατανομής Bernoulli.

Λύση:

(1) Αν $|X| \le B$ για κάποιο $B > 0$ έχουμε $\left|e^{tX}\right| \le e^{|t|B}$ άρα η μέση τιμή της e^{tX} υπάρχει αφού η ΤΜ είναι φραγμένη.

(2) Αν X είναι Bernoulli με παράμετρο p, παίρνει δηλ. την τιμή 1 με πιθανότητα p και την τιμή 0 με πιθανότητα $1 - p$ τότε

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \mathbb{P}[X = 0] \cdot e^{t \cdot 0} + \mathbb{P}[X = 1] \cdot e^{t \cdot 1} = 1 - p + pe^t,$$

ενώ αν η Y ακολουθεί τη διωνυμική $B(n, p)$ τότε (χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα)

$$M_Y(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{tk} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = (1 - p + pe^t)^n.$$

(3) Προφανώς ισχύει

$$M_X(0) = \mathbb{E}\left[e^{0 \cdot X}\right] = \mathbb{E}[1] = 1.$$

Επίσης

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n t^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbb{E}[X^n]\, t^n,$$

και παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$M'_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbb{E}[X^n]\, n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \mathbb{E}[X^n]\, t^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbb{E}\left[X^{k+1}\right] t^k$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $k = n - 1$. Θέτοντας $t = 0$ μένει μόνο ο πρώτος όρος ($k = 0$) και παίρνουμε $M'_X(0) = \mathbb{E}[X]$. Οι ανώτερες δυνάμεις βγαίνουν με όμοιο τρόπο.

(4) Αφού οι X_j είναι ανεξάρτητες τότε και οι e^{tX_j} είναι ανεξάρτητες άρα

$$M_S(t) = \mathbb{E}\left[e^{tS}\right] = \mathbb{E}\left[e^{tX_1} e^{tX_2} \cdots e^{tX_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{tX_1}\right] \mathbb{E}\left[e^{tX_2}\right] \cdots \mathbb{E}\left[e^{tX_n}\right] = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t).$$

Αν οι $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες Bernoulli με παράμετρο p τότε γνωρίζουμε ότι το άθροισμά τους $S = X_1 + \cdots + X_n$ είναι διωνυμική $B(n, p)$, οπότε

$$M_S(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t) = (M_{X_1}(t))^n = (1 - p + pe^t)^n$$

και ξαναβρήκαμε τον τύπο για τη ροπογεννήτρια της διωνυμικής χρησιμοποιώντας τον τύπο για τη ροπογεννήτρια της Bernoulli.