Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητείστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Σε ένα κουτί μέσα βρίσκονται τρείς βώλοι, ένας κόκκινος, ένας πράσινος κι ένας μπλέ. Το πείραμά μας συνίσταται στο να τραβήξουμε ένα βώλο, να σημειώσουμε το χρώμα του, να τον επανατοποθετήσουμε μέσα στο κουτί, να τραβήξουμε πάλι ένα βώλο και να σημειώσουμε και αυτού το χρώμα.

(1) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος; Ποια η κατανομή πιθανότητας στα στοιχεία του αν όλοι οι βώλοι που είναι μέσα στο κουτί είναι εξίσου πιθανό να τραβηχτούν κάθε φορά;
(2) Απαντήστε στο ίδιο ερώτημα αν το πείραμα τροποιηθεί ως εξής: αφού τραβήξουμε πρώτο βώλο, *δεν τον επανατοποθετούμε στο κουτί*, αλλά απλά τραβάμε και τον δεύτερο από τους δύο εναπομείναντες.

2. Ρίχνουμε ζεύγος τίμιων ζαριών.

(1) Ποια τα στοιχεία του ενδεχομένου «τα δυο αποτελέσματα έχουν άθροισμα 4»;
(2) Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού;

3. Αν A, B ενδεχόμενα δείξτε ότι

(1) $\mathbb{P}[A \triangle B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - 2\mathbb{P}[A \cap B]$
(2) $|\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B]| \le \mathbb{P}[A \triangle B]$

Εδώ $A \triangle B$ είναι η συμμετρική διαφορά των A και B, τα στοιχεία δηλ. του δειγματικού χώρου που ανήκουν ακριβώς σε ένα από τα A, B. Με άλλα λόγια $A \triangle B$ είναι το ενδεχόμενο να συμβαίνει το A και όχι το B ή να συμβαίνει το B και όχι το A.

4. Αν A, B, C ενδεχόμενα δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[B \cap C] - \mathbb{P}[C \cap A] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C].$$

Ξεκινήστε κάνοντας ένα διάγραμμα Venn για τρία σύνολα.

5. Έστω A, B ενδεχόμενα σε χώρο πιθανότητας με $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 0$.

(1) Δείξτε ότι $\mathbb{P}[A \cup B] = 0$.
(2) Γενικεύστε το σε παραπάνω από δύο ενδεχόμενα, ακόμη και σε άπειρη ακολουθία σχεδόν αδύνατων ενδεχομένων (με πιθανότητα 0 το καθένα δηλ.).

6. Έστω ακολουθία ενδεχομένων E_k, $k \ge 1$, σε ένα δειγματικό χώρο Ω με συνολοσυνάρτηση πιθανότητας $\mathbb{P}[\cdot]$. Υποθέστε ότι $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[E_k] = 0$. Δείξτε ότι το ενδεχόμενο $E = \bigcap_{k\ge1} E_k$ (το ενδεχόμενο δηλ. να ισχύουν όλα τα E_k, $k \ge 1$) είναι σχεδόν αδύνατο, ισχύει δηλ. $\mathbb{P}[E] = 0$.

Χρησιμοποείστε τη μονοτονία της συνολοσυνάρτησης πιθανότητας, ότι δηλ. αν $A \subseteq B$ είναι δύο ενδεχόμενα τότε $\mathbb{P}[A] \le \mathbb{P}[B]$. Κάντε επίσης την παρατήρηση ότι $E \subseteq E_k$ για κάθε φυσικό αριθμό k.

7. Έστω σχεδόν σίγουρα ενδεχόμενα E_k, $k \ge 1$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathbb{P}[E_k] = 1$ για κάθε $k \ge 1$.
Δείξτε ότι σχεδόν σίγουρα ισχύουν όλα τα E_k. Με άλλα λόγια δείξτε ότι $\mathbb{P}\left[\bigcap_{k\ge1} E_k\right] = 1$.

Δείξτε ότι $\mathbb{P}\left[\left(\bigcap_{k\ge1} E_k\right)^c\right] = 0$. Με βάση τους κανόνες του de Morgan ισχύει

$$\left(\bigcap_{k\ge1} E_k\right)^c = \bigcup_{k\ge1} E_k^c.$$

Άρα $\mathbb{P}\left[\left(\bigcap_{k\ge1} E_k\right)^c\right] \le \sum_{k\ge1} \mathbb{P}[E_k^c]$ από την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας της πιθανότητας.

8. Έστω ενδεχόμενα A_k, $k \ge 1$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα $\limsup_k A_k$ και $\liminf_k A_k$ ως εξής:

$$\limsup_k A_k = \bigcap_{k\ge1} \bigcup_{n\ge k} A_n \text{ και } \liminf_k A_k = \bigcup_{k\ge1} \bigcap_{n\ge k} A_n.$$

Δείξτε ότι το ενδεχόμενο $\limsup_k A_k$ ισχύει ακριβώς όταν ισχύουν άπειρα από τα A_k και το ενδεχόμενο $\liminf_k A_k$ ακριβώς όταν ισχύουν *τελικά* όλα τα A_k, όταν δηλ. υπάρχει κάποιο k_0 ώστε να ισχύουν όλα τα A_k, $k \ge k_0$.

9. Το παρακάτω πρόγραμμα σε `python` πραγματοποιεί N φορές ($= 1000$ στο πρόγραμμα) το εξής πείραμα. Ρίχνει δύο ζάρια και μετράει το πόσες φορές ισχύει το ενδεχόμενο να είναι ίσα τα δύο αποτελέσματα. Η συχνότητα του πότε συμβαίνει αυτό (πόσες φορές συνέβη διαιρεμένο με το N) είναι ακριβώς η έννοια που προσπαθεί να «πιάσει» η πιθανότητα ενός ενδεχομένου. Αν τρέξετε το πρόγραμμα μερικές φορές θα δείτε ότι κάθε φορά βγάζει και άλλο αποτέλεσμα, αλλά όλα είναι «κοντά» στο σωστό αριθμό $1/6 = 0.1666$. Θα παρατηρήσετε ότι όσο αυξάνετε το N (αριθμός επαναλήψεων του πειράματος) τόσο λιγότερο κυμαίνεται η συχνότητα που υπολογίζει το πρόγραμμα από τον αριθμό 1/6. Αυτό είναι που ονομάζουμε «Νόμο των μεγάλων αριθμών», που θα έχουμε την ευκαιρία να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε αργότερα.

Αν δεν έχετε `python 3` εγκατεστημένη τον υπολογιστή σας μπορείτε να τρέξετε αυτό το πρόγραμμα και να παίξετε με αυτό online, π.χ. στο `https://repl.it/L2lz/0`

```
import random
N=1000 # Πλήθος φορών που εκτελούμε το πείραμα
counter=0 # Πόσες φορές συνέβη το ενδεχόμενο που κοιτάμε, αρχικά 0
for i in range(N): # εκτελούμε N φορές το πείραμα: ρίχνουμε δύο ζάρια και κοιτάμε πότε τα δύο αποτελέσματα είναι ίδια
    x = random.randint(1,6); y = random.randint(1,6) # εδώ παράγουμε δύο τυχαίους ακεραίους από 1 έως 6
    if x==y: # το ενδεχόμενο ισχύει
        counter += 1 # αυξάνουμε το μετρητή κατά 1
frequency = counter/N # με τι συχνότητα συνέβη το ενδεχόμενο αυτό
print("Το ενδεχόμενο συνέβη με συχνότητα {}".format(frequency))
```