13/03/2024

Cauchy ⇒ Έχει πυκνότητα $\frac{c}{1+x^2}$

Ασθενής Νόμος των μεγάλων αριθμών:

"Εύκολη" εκδοχή L_2

Υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}|X_i|^2 < +\infty$, $\forall i = 1, \dots$ και ότι αν $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ισχύει $\boxed{\frac{Var(S_n)}{n^2} \to 0}$ ⊛

Τότε $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L_2} 0$

Απόδειξη:

$$\mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n}\right|^2 = \frac{1}{n^2} Var(S_n) \xrightarrow{\text{υποθ.}} 0$$

∎

- Ειδικότερα, αν $Var(X_i) \leq M$ και τα X_i είναι ασυσχέτιστα $Cov(X_i, X_j) = 0$, τότε ικανοποιείται η ⊛

Πράγματι, $Var(S_n) = \sum Var(X_i) + 2\sum_{i<j} \underbrace{cov(X_i, X_j)}_{0} \leq M \cdot n$

Εφαρμογή:

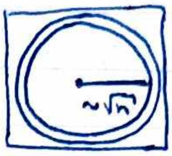
Θεωρούμε τον κύβο $[-1,1]^n = C$ και X ομοιόμορφα στον C, δηλαδή $X = (x_1, \dots, x_n)$ και x_i είναι ομοιόμορφες στο $[-1,1]$

Θεωρούμε τις X_i^2. Τότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος $\left(\mathbb{E}X_1^4 = \int_{-1}^{1} x^4 dx\right)$.

Άρα $\frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{n} - \underbrace{\mathbb{E}X_1^2}_{1/3} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} - \frac{1}{3}\right| > \varepsilon\right) \to 0 \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\sqrt{n\left(\frac{1}{3}-\varepsilon\right)} < \|x\|_2 < \sqrt{n\left(\frac{1}{3}+\varepsilon\right)}\right) \longrightarrow 1$$



Ασθενής Νόμος των μεγάλων αριθμών:

Θεωρούμε $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες, ώστε $t\,\mathbb{P}(|X_i|>t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, τότε $\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, όπου

$$\mu_n = \mathbb{E} X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1|\le n\}}$$

↳ Θα χρειαστούμε το παρακάτω γενικό θεώρημα

Θεώρημα:

Έστω

$$\begin{matrix} X_{1,1} & & \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \\ X_{3,1} & X_{3,2} & X_{3,3} \end{matrix}$$

ένας τριγωνικός πίνακας τυχαίων μεταβλητών.

Υποθέτουμε ότι για κάθε m, τα $X_{m,1}, \dots, X_{m,m}$ είναι ανεξάρτητα.

Έστω (b_n) ακολουθία με $b_n \to +\infty$ και $\tilde{X}_{n,k} = X_{n,k} \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}|\le b_n\}}$

Υποθέτουμε ότι:

(i) $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_{n,k}|>b_n) \longrightarrow 0$

(ii) $\frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\tilde{X}_{n,k}^2 \longrightarrow 0$

Τότε $\frac{S_n - \mathbb{E}\tilde{S}_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, όπου $S_n = \sum X_{n,k}$ και $\tilde{S}_n = \sum \tilde{X}_{n,k}$

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon>0$ και

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - \mathbb{E}\tilde{S}_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right) = \underbrace{\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - \mathbb{E}\tilde{S}_n}{b_n}\right| > \varepsilon \text{ και } S_n = \tilde{S}_n\right)}_{\boxed{A}}$$

$$+ \underbrace{\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - \mathbb{E}\tilde{S}_n}{b_n}\right| > \varepsilon \text{ και } S_n \neq \tilde{S}_n\right)}_{\boxed{B}}$$

Για το $\boxed{A}$:

$$A \underset{\text{Cheb}}{\leq} \frac{Var(\tilde{S}_n)}{\varepsilon^2 b_n^2} \underline{\underline{\text{ανεξ.}}} \frac{\sum_{k=1}^{n} Var(\widetilde{X_{n,k}})}{\varepsilon^2 b_n^2} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} E\widetilde{X_{n,k}^2}}{\varepsilon^2 b_n^2} \xrightarrow{\text{υποθ.}} 0$$

Για το $\boxed{B}$:

$S_n \neq \tilde{S}_n \Rightarrow X_{n,k} \neq \widetilde{X_{n,k}}$ για κάποιο $k \Rightarrow \exists k : |X_{n,k}| > b_n$

$$B \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\widetilde{X_{n,k}} \neq X_{n,k}) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_{n,k}| > b_n) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Αν πάρουμε $X_{n,k} = X_k$ και και $b_n = n$. Τότε $\widetilde{X_{n,k}} = X_k 1_{\{|X_k| \leq n\}}$

Η (i) γίνεται $n\mathbb{P}(|X_1| > n) \to 0$

Η (ii) γίνεται $\frac{1}{n^2} n \mathbb{E} X_1^2 1_{\{|X_1| \leq n\}} = \frac{1}{n} \mathbb{E} X_1^2 1_{\{|X_1| \leq n\}} =$

$$= \frac{1}{n} \mathbb{E} \int_0^\infty 2t 1_{\{|X_1| \leq n \text{ και } |X_1| > t\}} \underline{\underline{\text{Fubini}}} \frac{1}{n} \int_0^\infty 2t \mathbb{P}\left(\begin{matrix}|X_1| \leq n \text{ και} \\ |X_1| > t\end{matrix}\right) dt$$

$$\leq \frac{1}{n} \int_0^\infty 2t \mathbb{P}(|X_1| > t)\, dt = \frac{2}{n} \int_0^n f(t)\, dt$$

Ξέρω ότι $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ και $f(t) \leq t$

<u>Λήμμα:</u>

Αν $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ φραγμένη και $f(t) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$, τότε $\frac{1}{n} \int_0^n f(t)\, dt \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

$$\left(\text{Αν } a_n \to a, \text{ τότε } \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a \right)$$

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $M = \sup f$. Έστω $\varepsilon > 0$

Υπάρχει $L > 0 : \forall t \geq L\ f(t) < \varepsilon$

$$\int_0^n f(t)\, dt = \int_0^L f(t)\, dt + \int_L^n f(t)\, dt \leq ML + (n - L)\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \int_0^n f(t)\, dt \leq \frac{ML}{n} + \left(1 - \frac{L}{n}\right)\varepsilon \leq 2\varepsilon \text{ για } n: \text{μεγάλο}$$

Παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης:

Έστω $X_1, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες με $\mathbb{P}(X_1 = 2^k) = \frac{1}{2^k}$, $k \geq 1$

$$\mathbb{E}X_1 = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2^2}\cdot 2^2 + \dots = +\infty$$

$$\mathbb{P}(X_1 \geq 2^m) = \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2^{1-m}$$

Αν $b_n = 2^{m_n}$. Τότε, η (i) του θεωρήματος γίνεται

$n\mathbb{P}(X_1 \geq 2^{m_n}) \to 0 \Leftrightarrow n\cdot 2^{1-m_n} \to 0$

Η βέλτιστη επιλογή είναι $m_n = \log_2 n + \omega_n$, όπου $\omega_n \to +\infty$

(δηλαδή $b_n = n\cdot 2^{\omega_n}$)

Η (ii) γίνεται $\frac{n}{b_n^2}\mathbb{E}X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1| < b_n\}} = \frac{n}{b_n^2}\sum_{\substack{|X_1| \leq b_n \\ j \leq \lfloor m_n \rfloor}} 2^{2j}\cdot\frac{1}{2^j} \leq$

$$\leq \frac{n}{b_n} 2^{m_n+1} = \frac{2n}{b_n} = \frac{2}{2^{\omega_n}} \to 0$$

Από το θεώρημα $\frac{S_n - \mathbb{E}\tilde{S}_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

$$\mathbb{E}\tilde{S}_n = n\,\mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{1}_{\{|X_1| < b_n\}} = n\cdot m_n$$

Δηλαδή $\frac{S_n}{n2^{\omega_n}} - \frac{nm_n}{n2^{\omega_n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

$\Rightarrow \frac{S_n}{n2^{\omega_n}} - \frac{\log_2 n + \omega_n}{2^{\omega_n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ Παίρνω $\omega_n = \log_2\log_2 n$

Τότε $\frac{S_n}{n\log_2 n} \to 1$