{11/03/2024}

- Βάζουμε ανεξάρτητα και ομοιόμορφα m μπάλες σε n κουτιά.
Δείξαμε ότι αν $m \geq (1+\varepsilon) n \log n$. Τότε:
$\mathbb{P}(\text{να υπάρχουν άδεια κουτιά}) \leq \frac{1}{n^{\varepsilon}}$

Έστω X το πλήθος των κουτιών που είναι κενά μετά την τοποθέτηση
$(\mathbb{P}(X>0) = \mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}X)$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X \cdot 1_{\{X>0\}} \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{\mathbb{E}X^2 \, \mathbb{E}1_{\{X>0\}}} = \sqrt{\mathbb{E}X^2 \, \mathbb{P}(X>0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(X>0) \geq \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}X^2}}$$

Είχαμε βρει ότι $\mathbb{E}X = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^m$

$$\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}X_j^2 + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}X_i X_j = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^m + \underbrace{n(n-1)}_{2\binom{n}{2}} \mathbb{E}X_1 X_2 =$$

$$= n\left(\frac{n-1}{n}\right)^m + n(n-1)\,\mathbb{P}(X_1 = X_2 = 1) = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^m + n(n-1)\frac{(n-2)^m}{n^m}$$

Τελικά, $$\mathbb{P}(X>0) \geq \frac{n^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2m}}{n\left(\frac{n-1}{n}\right)^m + n(n-1)\frac{(n-2)^m}{n^m}} = \frac{n\frac{(n-1)^{2m}}{n^m}}{(n-1)^m + (n-1)(n-2)^m} =$$

$$= \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^m}{\frac{1}{n} + \frac{(n-1)}{n}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^m} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^m}{\frac{1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^m}$$

Παίρνουμε $m \leq (1-\varepsilon) n \log n$

(Θέλουμε να βγάλουμε $\geq 1 - \frac{2}{n^{\varepsilon}}$)

Συγκλίσεις:

Θα λέμε ότι η X_n συγκλίνει στην τυχαία μεταβλητή X

α) Σχεδόν βέβαια αν $\mathbb{P}(\omega : \lim X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$

β) Κατά πιθανότητα, αν $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$

γ) Στον L_p, $p > 0$ αν $\mathbb{E}|X_n - X|^p \longrightarrow 0$

(π.χ) Αν $\Omega = \{1, 2\}$ και $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = 1/2$ και $X_n(1) = -1/n$ και $X_n(2) = 1/2$. Τότε

- $\forall \omega \in \Omega$ $X_n(\omega) \to 0$, άρα $X_n \to X$ σχεδόν βέβαια
- $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X = 0$, γιατί $\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} > \varepsilon\right) \to 0$
- $X_n \xrightarrow{L_p} X = 0$, γιατί $\mathbb{E}|X_n|^p = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^p} \to 0$

Θεώρημα:

Αν $X_n \to X$ σχεδόν βέβαια, τότε $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Απόδειξη:

$$A = \{\lim X_n = X\} = \bigcap_{l \geq 1} \underbrace{\bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} \left\{|X_n - X| < \frac{1}{l}\right\}}_{A_l}$$

Ξέρω ότι $\mathbb{P}(A) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A_l) = 1 \quad \forall l \geq 1$

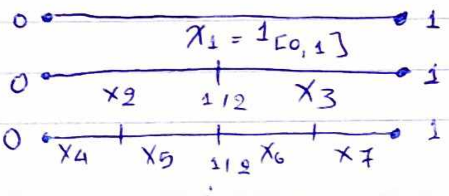
Από μονοτονία $\underset{1}{\mathbb{P}(A_l)} = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq N} \left\{|X_n - X| < \frac{1}{l}\right\}\right) \leq$

$$\leq \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(|X_N - X| < \frac{1}{l}\right) \Rightarrow \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(|X_N - X| \geq \frac{1}{l}\right) \leq 0$$

Άρα $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Παράδειγμα: (Για το αντίστροφο)

Έστω $\Omega = [0, 1]$ και $\mathbb{P}$ το ομοιόμορφο



• $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ γιατί αν $\varepsilon>0$, τότε $\mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) \leq \frac{1}{2^k} \to 0$
$2^k \leq n < 2^{k+1}$

• $X_n \xrightarrow{L_p} 0$, $\mathbb{E}|X_n|^p = \frac{1}{2^{kp}} \to 0$

• Όμως $X_n \overset{\sigma.\beta.}{\not\to} 0$. Έστω $\omega \in (0,1)$. $X_n(\omega)$ είναι ίσο με 1 για άπειρα n και για άπειρα ίσο με 0 (δεν υπάρχει το όριο)

<u>Θεώρημα:</u>
Αν $X_n \xrightarrow{L_p} X$, τότε $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

<u>Απόδειξη:</u>
$$\mathbb{P}(|X_n - X|>\varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - X|^p > \varepsilon^p) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n - X|^p}{\varepsilon^p} \to 0$$

<u>Παράδειγμα:</u> (για το αντίστροφο)
Έστω $X_n = n^{1/p} \mathbb{1}_{[0, 1/n]}$, $\Omega = [0,1]$ και $\mathbb{P}$: ομοιόμορφο

Τότε $\mathbb{E}|X_n|^p = 1$
Όμως $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, γιατί αν $\varepsilon>0$ $\mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) = \frac{1}{n} \to 0$
Από το θεώρημα, $X_n \xrightarrow{L_p} X$ θα έπρεπε $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Όμως $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Άρα (από μοναδικότητα του ορίου) $X \to 0$ άτοπο

<u>Θεώρημα (Riesz):</u>
Αν $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, τότε υπάρχει υπακολουθία $X_{k_n} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$

<u>Απόδειξη:</u>
Αφού $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, μπορώ να βρω X_{k_n} ώστε
$\mathbb{P}(|X_{k_n} - X| > 1/2^k) \leq 1/2^k$
Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\underbrace{|X_{k_n} - X| > \frac{1}{2^k}}_{A_{k_n}}\Big) < +\infty$, από Borel-Cantelli

Scanned with ACE Scanner

συμβαίνουν πεπερασμένα από αυτά με πιθανότητα 1.
Οπότε $X_{k_n} \xrightarrow{\sigma B} X$

<u>Θεώρημα:</u>
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της X_n έχει περαιτέρω υπακολουθία που συγκλίνει στην X σχεδόν βέβαια

<u>Απόδειξη:</u>
($\Rightarrow$) Έπεται από το προηγούμενο θεώρημα
($\Leftarrow$) Έστω ότι $X_n \overset{\mathbb{P}}{\not\to} X$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει ε' και X_{k_n} ώστε $\mathbb{P}(|X_{k_n} - X| > \varepsilon) \geq \varepsilon'$
Όμως, υπάρχει $X_{\ell_{k_n}}$ ώστε $\mathbb{P}(|X_{\ell_{k_n}} - X| > \varepsilon) \to 0$, άτοπο!

<u>Εφαρμογή:</u> (ισχύει για όλες τις συγκλίσεις)
Αν $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ και $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$. Τότε $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$.

<u>Λύση:</u>
Έστω ότι η $\underbrace{X_n + Y_n}_{S_n}$ δε συγκλίνει στην $\underbrace{X+Y}_{S}$

Τότε, βρίσκω S_{k_n}: $\mathbb{P}(|S_{k_n} - S| > \varepsilon) \geq \varepsilon'$