26/02/2024

Ανεξαρτησία:

- Μια οικογένεια $\{F_i\}_{i\in I}$ $(F_i \in \mathcal{F})$ συλλογών υποσυνόλων του Ω (δηλαδή σ-άλγεβρες, π-συστήματα,...) θα λέγεται ανεξάρτητη, αν για κάθε $A_{i_1}\in F_{i_1}, A_{i_2}\in F_{i_2}, \dots, A_{i_n}\in F_{i_n}$ ισχύει:
$$\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_n})=\mathbb{P}(A_{i_1})\cdots\mathbb{P}(A_{i_n})$$

- Μια οικογένεια ενδεχομένων $\{A_i\}_{i\in I}$ θα λέγεται ανεξάρτητη αν η οικογένεια $\{\sigma(A_i)\}_{i\in I}$ είναι ανεξάρτητη

- Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_i\}_{i\in I}$ θα λέγεται ανεξάρτητη, αν η οικογένεια $\{\sigma(X_i)\}_{i\in I}$ είναι ανεξάρτητη

Λήμματα Borel - Cantelli:

Υπενθύμιση:

- $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ (είναι το ενδεχόμενο "άπειρα από τα A_i συμβαίνουν")

- $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ (είναι το ενδεχόμενο "τελικά όλα τα A_i συμβαίνουν")

- $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$

  $\limsup A_n = \{\omega\in\Omega : \limsup_n \mathbb{1}_{A_n}(\omega)=1\}$

Borel-Cantelli 1

Αν $A_1, A_2, \dots$ είναι ακολουθία ενδεχομένων και $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)<+\infty$ τότε $\mathbb{P}(\limsup A_n)=0$

Απόδειξη:

Τα $B_k=\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n$ είναι φθίνουσα

$$\mathbb{P}(\limsup A_n)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_k\right)=\lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}(B_k)=\lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)\le$$

$$\leq \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$$

Borel-Cantelli ②:

Αν $A_1, \ldots$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων και $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$,

τότε $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$

Απόδειξη:

Τα $B_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c$ είναι αύξουσα

$$\mathbb{P}((\limsup A_n)^c) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right) \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{N} A_n^c\right) \overset{\text{ανεξαρτ}}{=} \prod_{n=k}^{N} \mathbb{P}(A_n^c) = \prod_{n=k}^{N} (1-\mathbb{P}(A_n)) \underset{1-x\leq e^{-x}}{\leq} e^{-\sum_{n=k}^{N} \mathbb{P}(A_n)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

έστω $N \geq k$

Παράδειγμα:

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, ώστε

$\mathbb{P}(X_n > t) = e^{-t}$, $t > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Έστω $\alpha > 0$ και θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A_n = \{X_n > \alpha \log n\}$

$\mathbb{P}(A_n) = e^{-\alpha \log n} = n^{-\alpha}$

$$\mathbb{P}(X_n > \alpha \log n \text{ για άπειρα } n) = \begin{cases} 1 & , \alpha \leq 1 \\ 0 & , \alpha > 1 \end{cases}$$

Έστω $L = \limsup_n \frac{X_n}{\log n}$

$$\mathbb{P}(L \geq 1) = \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} \geq 1 \text{ για άπειρα } n\right) = 1$$

$$\mathbb{P}(L > 1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{L \geq 1 + \tfrac{1}{k}\}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(L \geq 1 + \tfrac{1}{k}\right) = 0$$

0-1 νόμος του Kolmogorov:

Έστω $X_1, X_2, \dots$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και ορίζουμε

$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ (:ουρά σ-άλγεβρα)

(π.χ) το ενδεχόμενο "το $\lim X_n$ υπάρχει" είναι στην $\mathcal{T}$

" "η $\sum X_n$ συγκλίνει" είναι στην $\mathcal{T}$

$\{\limsup X_n > 1\}$ είναι στην $\mathcal{T}$

Θεώρημα Kolmogorov:

Αν X_i είναι ανεξάρτητα και $A \in \mathcal{T}$, τότε $P(A)=0$ ή $P(A)=1$

Απόδειξη:

Ορίζουμε $\mathcal{X}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$

και $\mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, \dots)$

Ισχύουν τα εξής:

1) Η $\mathcal{X}_n$ και ο $\mathcal{T}_n$ είναι ανεξάρτητες

Αν A είναι η οικογένεια των $\{X_i \le s_i\}$, $i \le n$, $s_i \in \mathbb{R}$ και

B είναι η οικογένεια των $\{X_i \le t_i\}$, $n+1 \le i \le n+m$ για κάποιο m

Οι A και B είναι ανεξάρτητες, είναι π-συστήματα και παράγουν τις $\mathcal{X}_n$ και $\mathcal{T}_n$

2) Η $\mathcal{X}_n$ και η $\mathcal{T}$ είναι ανεξάρτητες, αφού $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_n$

3) Αν $\mathcal{X} = \sigma(X_1, X_2, \dots)$ τότε $\mathcal{X}$ και $\mathcal{T}$ είναι ανεξάρτητες

Αν $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n$ είναι π-σύστημα και παράγει την $\mathcal{X}$

Από το (2) η $\mathcal{X}_n$ και $\mathcal{T}$ είναι ανεξάρτητες. Άρα Γ και $\mathcal{T}$ είναι ανεξάρτητες και αφού Γ είναι π-σύστημα και παράγει την $\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{X}$ και $\mathcal{T}$ είναι ανεξάρτητες

4) Έστω $A \in \mathcal{T}$. Ισχύει ότι $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, άρα $A \in \mathcal{X}$

Οπότε $P(A \cap A) = P(A)P(A) \Rightarrow P(A) = 0$ ή 1

Μέση Τιμή:

Έστω X τυχαία μεταβλητή. Θα λέμε ότι είναι ολοκληρώσιμη αν $\int_\Omega |X(\omega)| d\mathbb{P}(\omega) < +\infty$

Τότε, θέτουμε $\boxed{\mathbb{E}X = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)}$

Αν $X = (x_1, \dots, x_n)$ τυχαίο διάνυσμα, τότε $\mathbb{E}X = \begin{bmatrix} \mathbb{E}X_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}X_n \end{bmatrix}$

Ιδιότητες:

- Αν X είναι μη αρνητική τυχαία μεταβλητή, τότε $\mathbb{E}X \geq 0$
- Αν $X \geq Y \Rightarrow \mathbb{E}X \geq \mathbb{E}Y$
- (Τριγωνική ανισότητα): $|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|$
- (Γραμμικότητα): Αν X, Y ολοκληρώσιμες και $\alpha, b \in \mathbb{R}$, τότε $\alpha X + bY$ είναι ολοκληρώσιμη και $\mathbb{E}(\alpha X + bY) = \alpha \mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$

Θεωρήματα

1. Μονότονης σύγκλισης:
   Αν $X_i \geq 0$ και $X_{n+1} \geq X_n$ $\forall n \geq 1$, τότε
   $\mathbb{E}\lim_n X_n = \lim_n \mathbb{E}X_n$

2. Λήμμα Fatou:
   Αν $X_i \geq 0$ τότε $\mathbb{E}\liminf_n X_n \leq \liminf_n \mathbb{E}X_n$

3. Κυριαρχημένης σύγκλισης:
   Αν $X, X_1, \dots$ είναι τυχαίες μεταβλητές και $X_n \to X$ σχεδόν βεβαίως και $|X_n| \leq Y$, όπου Y ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή, τότε $\lim \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}\lim X_n = \mathbb{E}X$
   $\mathbb{E}|X_n - X| \to 0$

Πρόταση:

Έστω $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη. Τότε $\mathbb{E}h(X) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\mu_X(x)$

Απόδειξη:

(i) Για χαρακτηριστικές. Αν $h = 1_A$ και $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, τότε

$$\mathbb{E}h(X) \overset{\text{ορ}}{=} \int_{\Omega} 1_A \, dP(\omega) = \mathbb{P}(X \in A) = \mu_X(A) = \int_{\mathbb{R}} 1_A^{(x)} d\mu_X(x)$$

(ii) Για απλές: $h = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}$

(iii) Για μη αρνητικές: Βρίσκουμε αύξουσα h_n από απλές με $h_n \to h$ και χρησιμοποιούμε το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης

(iv) Για τυχούσα: $h = h^+ + h^-$ με $h^+ = \max\{0, h\}$

$h^- = \max\{0, -h\}$

Πόρισμα:

(I) Αν X διακριτή, $p_i = \mathbb{P}(X = x_i) > 0$ και $\sum p_i = 1$, τότε $\mu_X = \sum p_i \delta_{x_i}$, οπότε $\mathbb{E}h(X) = \sum_{x \in \{x_1, \dots\}} h(x) \mathbb{P}(X = x)$

(II) Αν X συνεχής, με πυκνότητα f, τότε $\mathbb{E}h(X) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\mu_X(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x)\, dx$