12/02/2024

Υπενθύμιση:

- Αν Ω είναι ένα σύνολο. Η συλλογή $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα αν:
1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $A^c \in \mathcal{F}$
3) Αν $A_i \in \mathcal{F}$, τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

- Το μέτρο είναι μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, ώστε:
1) $\mu(\phi) = 0$
2) Αν A_i είναι ξένα ανά δύο: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Αν $\mu(\Omega) = 1$, θα λέμε ότι το μ είναι μέτρο πιθανότητας

Πρόταση:

Αν μ: μέτρο πιθανότητας, τότε:

(i) $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$

(ii) $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$, αν $B \subseteq A$ (Ειδικότερα $\mu(B) \leq \mu(A)$)

(iii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

(iv) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

(v) → Αν A_n είναι αύξουσα ($A_i \subseteq A_{i+1}$), τότε $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$

→ Αν A_n είναι φθίνουσα ($A_i \supseteq A_{i+1}$), τότε $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$

Απόδειξη του (v):

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 \setminus A_1 \\ B_3 &= A_3 \setminus A_2 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \text{ξένα}$$

Τότε $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) - \mu(A_{i-1})$

Κατασκευή μέτρων πιθανότητας:

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ αριθμήσιμο και $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ (δυναμοσύνολο του Ω). Θέλουμε να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{F})$

Αρκεί να ορίσω $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, \infty]$

$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ και ζητάμε $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ (γιατί τότε $\mathbb{P}(\Omega) = 1$)

Γενικά, αν έχω $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$

Παράδειγμα:

Θέλω να ορίσω "ομοιόμορφο" μέτρο πιθανότητας στο $[0, 1]$

- Θέλουμε να είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές
- Τα μονοσύνολα να έχουν μέτρο 0 και $\mu([a, b]) = b - a$

↳ Ερώτηση: Αν $\Omega = [0, 1]$. Μπορούμε να ορίσουμε τέτοιο μέτρο πιθανότητας στο $(\Omega, 2^{\Omega})$;

↳ Απάντηση: Όχι!

Υπάρχει το σύνολο του Vitali

Θα γράφουμε $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ (είναι σχέση ισοδυναμίας)

Έστω V το σύνολο των αντιπροσώπων των κλάσεων (Έστω $0 \notin V$)

Ορίζουμε $x \oplus y = \begin{cases} x + y, & \text{αν } x + y \leq 1 \\ x + y - 1, & \text{αν } x + y > 1 \end{cases}$

Έστω $r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$

Ορίζω το σύνολο $V \oplus r = \{v \oplus r, v \in V\}$

Για διαφορετικά r, τα σύνολα αυτά είναι ξένα (Αν $v_1 \oplus r_1 = v_2 \oplus r_2$, $v_1 - v_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow v_1 = v_2$ οπότε και $r_1 = r_2$, γιατί $r_1, r_2 \in (0, 1)$)

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} V \oplus r = [0, 1]$$

Για να το δείξω έχω ότι ο ένας εγκλεισμός είναι προφανής.

Για τον άλλο: έστω $v \in [0, 1]$ και v_1 ο αντιπρόσωπος $\Rightarrow v - v_1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists r: v - v_1 = r \Rightarrow v = v_1 + r \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} V \oplus r$

Άρα $\mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcup_{r \in \mathbb{Q}\cap[0,1]} V \oplus r}_{\text{αριθμήσιμη ένωση}}\Big) = 1 = \sum_{r \in \mathbb{Q}\cap[0,1]} \mathbb{P}(V \oplus r) = \sum_{r \in \mathbb{Q}\cap[0,1]} \mathbb{P}(V)$ Άτοπο!

το μέτρο παραμένει αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές

$\rightsquigarrow$ Θέλω να ορίσω $\mathcal{F}$ που να περιέχει τα διαστήματα. Παίρνω την ελάχιστη τέτοια $\mathcal{F}$. Οπότε, θέλω να ορίσω $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0, +\infty]$

Ξέρω να ορίζω μέτρο στα $[a, b]$

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή (Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα. Έστω ότι η συνάρτηση $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ ικανοποιεί: (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, (ii) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ και A_i ξένα, (iii) Για κάθε αύξουσα A_n: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$

ή ισοδύναμα, αν B_i: φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, τότε $\mathbb{P}(B_n) \to 0$

Τότε μπορούμε να επεκτείνουμε το μέτρο σε όλη τη σ-άλγεβρα)

Έστω $F_0 = \{(a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \ldots \cup (a_n, b_n]\}$,

$0 \leq a_1 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_n \leq 1$

Η $\mathcal{F}_0$ είναι άλγεβρα

Αν $F \in \mathcal{F}_0$, $F \in (a_1, b_1] \cup \ldots \cup (a_n, b_n]$, τότε $\mathbb{P}(F) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

Θα εφαρμόσω το θεώρημα Καραθεοδωρή.

Τα (i), (ii) είναι προφανή.

Για το (iii): Έστω B_i, φθίνουσα με $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ και έστω ότι

$\mathbb{P}(B_n) \not\to 0$, άρα $\exists \varepsilon > 0$ ώστε $\mathbb{P}(B_n) \geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, βρίσκω C_k, ώστε $\underbrace{\overline{C_k}}_{\text{η κλειστότητα του } C_k} \subseteq B_k \cap (0, 1)$ και

$\mathbb{P}(B_k \setminus C_k) \leq$ κάτι μικρό (εσωτερική κανονικότητα)

$$\mathbb{P}\left(B_n \setminus \bigcap_{k\leq n} C_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup B_n \setminus C_k\right) \underset{\downarrow}{\leq} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\leq n} B_k \setminus C_k\right) \underset{\downarrow}{\leq} \sum_{k\leq n} \mathbb{P}(B_n \setminus C_k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

B: φθίνουσα   πεπερασμένη υπο-προσθετικότητα

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}(B_n)}_{\varepsilon \leq} - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\leq n} C_k\right) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\leq n} C_k\right) > \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \bigcap_{k\leq n} C_k \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\bigcap_{k\leq n} \overline{C_k}}_{A_n} \neq \emptyset$$

Τα A_n είναι συμπαγή και A_n: φθίνουσα $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{C_k} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \supseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{C_k} \neq \emptyset \text{ Άτοπο!}$$

Παράδειγμα:

Έστω $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots),\ \omega_i \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\infty}$

$A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} = \{\omega \in \Omega : \omega_i = \varepsilon_i,\ i = 1,\dots,n\}$

$\mathbb{P}(A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}) = \frac{1}{2^n}$

$\mathcal{F}_0 = \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k : A_k \in A_{\varepsilon_1,\dots}\}$

Αυτή είναι άλγεβρα. Εφαρμόζουμε Θεώρημα επέκτασης Καραθεοδωρή

Τα (i), (ii) είναι προφανή

Για το (iii): Από Θεώρημα Tychonoff το $\{0,1\}^{\infty}$ είναι συμπαγές