

$$S = \sum_{\substack{i,j,k=1 \dots N \\ i \leq j \leq k}} 1 = \sum_{\substack{i,j \\ 1 \leq i \leq j \leq N}} \sum_{k=j}^N 1 = \sum_{\substack{i,j \\ 1 \leq i \leq j \leq N}} (N-j+1) =$$

$$= \sum_{\substack{i,j \\ 1 \leq i \leq j \leq N}} (N+1) - \sum_{\substack{i,j \\ 1 \leq i \leq j \leq N}} j = \frac{N(N+1)^2}{2} - \sum_{\substack{i,j \\ 1 \leq i \leq j \leq N}} j$$

↑ από άσκηση 7

$$T = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ i \leq j}} j = \sum_{j=1}^N j \sum_{i=1}^j 1 = \sum_{j=1}^N j^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

γνωστή ταυτότητα  
 άθροισμα N πρώτων τετραγώνων  
 (μπορείτε να τη δείξετε επαγωγικά)

$$S = \frac{3N(N+1)^2 - N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{N(N+1)}{6} (3N+3-2N-1) = \frac{N(N+1)(N+2)}{6}$$