Λύσεις ασκήσεων φυλλαδίου 1ου

Δακτύλιοι και modules 2023 Χειμ

Άσκηση 1η

(ί) R ακ. περ. Κάθε πρώτο στοιχ. του R είναι ανάγωγο

Απ. Έστω p πρώτο $\Rightarrow (p \neq 0$ και $p \notin R^*)$

Αν $p = \alpha \cdot b \mid \alpha, b \in R$ τότε

$p \mid p = \alpha \cdot b$ και, αφού p πρώτο,

$\Rightarrow \boxed{p \mid \alpha \vee p \mid b}$

Αν $p \mid \alpha$, επειδή από $p = \alpha \cdot b$, έχουμε

και $\alpha \mid p$, άρα p και α συνεταιρικά

$\Rightarrow p = \alpha \cdot b = p \cdot (cb) \Rightarrow p(1 - cb) = 0$,

$p \neq 0$, R ακερ. περιοχή, άρα $cb = 1$

$\Rightarrow b \in R^* \Rightarrow$ η ανάλυση όχι γνήσια.

Ανάλογα, αν $p \mid b \Rightarrow \alpha \in R^*$

(ii) Αν R Π.Μ.Α., τότε κάθε ανάγωγο είναι πρώτο του R

Έστω p ένα ανάγωγο στοιχείο του R

Υποθ. ότι $p \mid a \cdot b$, $a, b \in R$

(Αν $a=0$ ή $a \in R^*$ $\Rightarrow p \mid a$ ή $p \mid b$,
αν $b=0$ ή $b \in R^* \Rightarrow p \mid b$ ή $p \mid a$).

Έστω λοιπόν $p \mid a \cdot b$, $a \cdot b \neq 0$ και $a, b \notin R^*$

$p \mid a \cdot b \Rightarrow \exists c \in R$ τ.ω. $a \cdot b = p \cdot c$
$c \neq 0$ και $c \notin R^*$
(Αν ήταν $c \in R^* \Rightarrow p = (c^{-1}a)b$
γνήσια παραγοντοπ. του p, άτοπο
αφού p ανάγωγο.)

Αν $a = \prod_{i=1}^{n} p_i$, $b = \prod_{j=1}^{m} q_j$, $c = \prod_{k=1}^{s} r_k$

οι (μονοσήμαντες) αναλύσεις των a, b, c
σε ανάγωγα, τότε από

$a \cdot b = p \cdot c \Rightarrow$ Το p συνεταιρικό με
ανάγωγο παράγοντα του δεξιού μέλους

Άρα $p \mid a$ (αν $p \sim$ (ανάγωγο παραγ. του a))
είτε
$p \mid b$ (αν $p \sim$ (ανάγωγο παραγ. του b))

$\Rightarrow p$ πρώτο

ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ και Modules, 2023
Φυλλάδιο 1ο

Άσκηση 3η $R = \mathbb{Z}[i]$ είναι Ευκλ. Περιοχή ως προς την απεικόνιση

$$N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0$$
$$a+bi \mapsto |a+bi|^2 = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$$

(i) Αν $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, $xy \neq 0$ και $x \underset{R}{|} y$

$\Rightarrow \exists z \in R \setminus \{0\}$ τ.ω $y = z \cdot x$. Το $|z| \geq 1$.

Άρα $N(y) = |y|^2 = |z \cdot x|^2 = |z|^2 \cdot |x|^2 \geq |x|^2 = N(x)$

(ii) Έστω $x \in \mathbb{Z}[i]$ και $y \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$

Αφού $\mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ σώμα το $q' := \frac{x}{y} = a'+b'i \in \mathbb{C}$

(Τα a', b' είναι, εν γένει, ρητοί αριθμοί όχι ακέραιοι)

Υπάρχουν ακέραιοι $a, b \in \mathbb{Z}$ τ.ω.
$$|a-a'| \leq \frac{1}{2}, \quad |b-b'| \leq \frac{1}{2}$$

Έστω $q := x+yi \in \mathbb{Z}[i]$. Ισχύει:

$$N(q'-q) = |q'-q|^2 = |a'+b'i - a - bi|^2 =$$
$$= |(a'-a)+(b'-b)i| = |a'-a|^2 + |b'-b|^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Έστω $r := x - qy = (q'-q)y$

Αν $q' = q \Longrightarrow r = 0$

Αν $q' \neq q \Rightarrow N(r) = N((q'-q)y) =$

$= |q'-q|^2 \cdot |y|^2 \leq \frac{1}{2}|y|^2 < N(y)$ //

(ii) $10 = 2 \cdot 5 = (1+3i)(1-3i)$

Το 2 <u>δεν</u> είναι <u>ανάγωγο</u> στον $\mathbb{Z}[i]$

αφού $2 = (1+i)(1-i)$. Επίσης το 5 δεν είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Z}[i]$

$5 = (1+2i)(1-2i)$

Άρα $2 \cdot 5 = [(1+i)(1+2i)] \cdot [(1-i)(1-2i)]$

$= (-1)(1-3i) \cdot (-1)(1+3i)$

$= (1-3i)(1+3i)$

Ούτε το $1+3i = (1-i)(-1+2i)$

$1-3i = (1+2i)(1+i)$

$(1-i)(1+i)(-1+2i)(1+2i)$

$= \underline{\underline{2 \cdot 5}}$

Και το <u>δεξιό</u> και το αριστερό μέλος παραγοντοποιούνται στα <u>ίδια</u> <u>ανάγωγα</u> <u>στοιχεία</u>. Άρα πρόκειται για την <u>ίδια</u> παραγοντοποίηση <u>και όχι</u> για <u>δύο</u> <u>διαφορετικές</u>

ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ και MODULES 2023

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1ο

άσκηση 4η

(i) $\Rightarrow$ (ii) p πρώτο, R π.κ.Ι (άρα R ακ. περ.)

$\Rightarrow p$ ανάγωγο

(ii) $\Rightarrow$ (i) Αν p ανάγωγο, $R =$ π.κ.Ι $\Rightarrow R$ Π.Μ.Α

Άρα, ασκ1, $\Rightarrow p$ πρώτο

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω p ανάγωγο και $A \trianglelefteq R$

τ.ω. $\langle p \rangle \subseteq A$

Ο R είναι π.κ.Ι $\Rightarrow \exists\, \alpha \in R$ τ.ω $A = \langle \alpha \rangle$

Το $p \in \langle p \rangle \subseteq A = \langle \alpha \rangle \Rightarrow p \in \langle \alpha \rangle \Rightarrow$

$(\exists\, b \in R$ τ.ω. $p = \alpha \cdot b)$

Αν $\alpha \in R^*$, τότε $A = \langle \alpha \rangle = R$

Αν $\alpha \notin R^*$, τότε από

$p = \alpha \cdot b$ και p ανάγωγο $\Rightarrow b =: \varepsilon \in R^*$

Επομένως, $\langle p \rangle = \langle \alpha \cdot \varepsilon \rangle = \langle \alpha \rangle = A$.

$\Rightarrow \langle p \rangle$ maximal

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\langle p \rangle$ maximal $\Rightarrow R/\langle p \rangle$ σώμα

(iv) $\Rightarrow$ (v) $R/\langle p \rangle$ σώμα $\Rightarrow R/\langle p \rangle$ ακερ. περιοχή

(v) $\Rightarrow$ (ii) $R/\langle p \rangle$ ακερ. περιοχή $\Rightarrow \langle p \rangle$ πρώτο ιδεώδες. Έστω $\alpha, b \in R$ και ότι

$p \mid \alpha \cdot b \Rightarrow \alpha \cdot b \in \langle p \rangle$, $\langle p \rangle$ πρώτο $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \in \langle p \rangle \vee b \in \langle p \rangle \Rightarrow [p \mid \alpha \vee p \mid b]$

$\Rightarrow p$ πρώτο στοιχείο του R //