

## ΒΙΟ-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

### Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Παραδώστε τις ασκήσεις 1.3, 1.4, 1.5, 1.7, 1.9, 1.12

#### Άσκηση 1.1

1. Φτιάξτε τον  $2 \times 3$  πίνακα  $A = (a_{i,j})$  όπου  $a_{i,j} = i + 2j$ .
2. Φτιάξτε τον  $3 \times 3$  πίνακα  $B = (b_{i,j})$  όπου  $b_{i,j} = i^2 + j^2$ .
3. Υπολογίστε το γινόμενο  $AB$ .

#### Άσκηση 1.2 Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \pi/2 \\ \sqrt{2}/3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \pi/6 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 1.3 Υπολογίστε τα γινόμενα  $FGH$  και  $HGF$  (έχουμε παραλείψει τα μηδενικά πάνω από τη διαγώνιο):

$$F = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 1.4 Ο πίνακας  $P_{i,j} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα  $I$  όταν αντιμεταθέσουμε τις στήλες  $i$  και  $j$ . Υπολογίστε τα γινόμενα  $P_{2,3} \cdot A$  και  $A \cdot P_{1,3}$ , όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Τι παρατηρείτε;

#### Άσκηση 1.5 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τον πίνακα  $A^2$ . Εξηγήστε γιατί  $A^n = A$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Άσκηση 1.6 Βρείτε παραδείγματα πραγματικών  $2 \times 2$  πινάκων που να ικανοποιούν

1.  $B^2 = O$  με  $B \neq O$ ,
2.  $EF = O$  χωρίς κανένα στοιχείο των  $E, F$  να είναι 0.

**Άσκηση 1.7** Έστω  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε  $3A = A^2 + AB$ , όπου

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τον πίνακα  $A$ .

**Άσκηση 1.8** Βρείτε τις δυνάμεις  $A, A^2, A^3, \dots, A^n$  του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

**Άσκηση 1.9** Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Δείξτε ότι  $A^3 - 3A^2 + 4I_3 = O$ . Δείξτε ότι ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφο του.

**Άσκηση 1.10** Έστω  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  δύο άνω (αντίστοιχα κάτω) τριγωνικοί πίνακες. Δείξτε ότι ο πίνακας  $AB$  είναι άνω (αντίστοιχα κάτω) τριγωνικός.

**Άσκηση 1.11** Δίνεται ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Δείξτε ότι

1. Ο  $A + A^T$  είναι συμμετρικός.
2. Ο  $A - A^T$  είναι αντισυμμετρικός.
3. Ο  $A \cdot A^T$  είναι συμμετρικός.
4. Ο  $A$  γράφεται σαν άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

**Άσκηση 1.12** Για τα παρακάτω ερωτήματα χρησιμοποιήστε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων.

1. Έστω ότι έχετε πίνακες  $A \in \mathbb{R}^{m \times p}, B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . Υπολογίστε πόσους πολλαπλασιασμούς πραγματικών αριθμών πρέπει να κάνουμε για τον υπολογισμό του γινομένου  $AB$ .
2. Έστω ότι έχετε πίνακες  $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_3}, C \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_4}$  και θέλετε να υπολογίσετε το γινόμενο  $ABC$ . Υπολογίστε το κόστος (σε πολλαπλασιασμούς αριθμών) του υπολογισμού  $(A \cdot B) \cdot C$  και του  $A \cdot (B \cdot C)$ . Εάν  $n_1 = 100, n_2 = 10, n_3 = 100, n_4 = 20$ , ποιό από τους δύο υπολογισμούς θα κάνετε;

**Άσκηση 1.13** Αν  $A, B$  είναι 2 επί 2 πίνακες που το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης τους είναι ίσο με 1, δείξτε ότι και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του  $AB$  είναι ίσο 1. (Αυτή η άσκηση γενικεύεται για πίνακες οποιουδήποτε σχήματος.)