

ΜΑΘΗΜΑ: ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ και MODULES
Χειμερινό εξάμηνο 2023
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 2°

- (1^η) Να αποδείξετε ότι όλα τα ιδεώδη του \mathbb{Z} είναι κύρια ιδεώδη.
- (2^η) Αν $m, n \in \mathbb{Z}$ ποιά είναι τα ιδεώδη $\langle m+n \rangle$, $\langle m \rangle \cdot \langle n \rangle$?
- (3^η) Αν R μεταδ. δακτύλιος με μοναδιαίο και $A \trianglelefteq R$, $B \trianglelefteq R$, πρώτα μεταξύ τους, να αποδείξετε ότι $A \cdot B = A \cap B$.
- (4^η) Αν R μετωδικός δακτύλιος με μοναδιαίο στον οποίο ισχύει
(κάθε ιδεώδες $A \trianglelefteq R$ ($A \neq R$) είναι πρώτο)
να αποδείξετε ότι ο R είναι σωμα.
- (5^η) Να αποδείξετε ότι ο δακτύλιος $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ είναι Ευκλείδεια περιοχή.
- (6^η) Αν $d \leq -2$, d square-free, να αποδείξετε ότι $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^* = \{\pm 1\}$
- (7^η) Αν $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $d \neq 0, 1$, d square-free και υποδ. ότι ο R είναι Π.Μ.Α. να αποδ. ότι το 2 δεν είναι ανάγωγο στον R
- (8^η) Αν $d < -2$, d square-free να αποδείξετε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ δεν είναι Π.Μ.Α.

- 2 -

- (9^η) Να βρείτε ένα στοιχείο του $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ το οποίο έχει δύο γνήσιες αντιστρεψιμότητες
- (10^η) Να κάνετε το ίδιο για τον δακτύλιο $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Ηράκλειο 5-10-23

Παράδοση ασκήσεων
Δευτέρα 16-10-2023