Εαρινο εξαμηνο 2022-23 - Θεωρια Σωματων

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Γράψτε το πολυώνυμο x^4-1 ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων, θεωρώντας το ως πολυώνυμο των δακτυλίων $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$.

2. (α) Ειναι το $x^2+\bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_3[x]$;

   (β) Ειναι το $x^2+\bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_5[x]$;

   (γ) Είναι το $x^3+x+\bar{2}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_3[x]$;

   (δ) Είναι το $x^3-\bar{3}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_7[x]$;

   (ε) Είναι το $x^3+x+\bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_5[x]$;

   (ϛ) Είναι το $x^3-\bar{9}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_{11}[x]$

3. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x)=x^4-2x^3-x+2\in\mathbb{Z}[x]$. Βρείτε όλες τις ρίζες τού $f(x)$: i) στο $\mathbb{Z}$, ii) στο $\mathbb{Q}$, iii) στο $\mathbb{R}$ και iv) στο $\mathbb{C}$.

4. (α) Δείξτε ότι το $\sqrt{5}\in\mathbb{R}$ είναι αλγεβρικό $|\mathbb{Q}$ και βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμό του $\mathrm{Irr}(\sqrt{5},\mathbb{Q})$.

   (β) Δείξτε ότι το $-1+\sqrt{5}\in\mathbb{R}$ είναι αλγεβρικό $|\mathbb{Q}$ και βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμό του $\mathrm{Irr}(-1+\sqrt{5},\mathbb{Q})$.

   (γ) Δείξτε ότι το $\sqrt{1+\sqrt{5}}\in\mathbb{R}$ είναι αλγεβρικό $|\mathbb{Q}$ και βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμό του $\mathrm{Irr}(\sqrt{1+\sqrt{5}},\mathbb{Q})$.

   (δ) Δείξτε ότι το $\sqrt[7]{5}\in\mathbb{R}$ είναι αλγεβρικό $|\mathbb{Q}$ και βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμό του $\mathrm{Irr}(\sqrt[7]{5},\mathbb{Q})$.

5. Έστω $F\leq K\leq L$ και $a\in L$. Έχουμε δεί στην θεωρία ότι αν το a είναι αλγεβρικό $|F$ τότε είναι και αλγεβρικό $|K$. Ποιά είναι η σχέση τού $\mathrm{Irr}(a,F)$ με το $\mathrm{Irr}(a,K)$;

6. Έστω K ένα σώμα. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $K[x]$ περιέχει άπειρο πλήθος αναγώγων πολυωνύμων. *Υπόδειξη:* Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο αναγώγων. Δουλέψετε όπως στην απόδειξη τού Ευκλείδη ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

7. (α) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x)=x^3+2x+2$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}[x]$.

   (β) Ως πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια πραγματική ρίζα, έστω a. Εκφράστε το $\frac{1}{1-a}$ ως στοιχείο τού $\mathbb{Q}[a]$.

8. (α) Δείξτε ότι ένα πολυώνυμο $f(X)\in F[x]$ είναι ανάγωγο εαν και μόνον αν το $f(x+1)\in F[x]$ είναι ανάγωγο.

   (β) Για $p=$πρώτο, δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x)=x^{p-1}+\cdots+x+1\in\mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο. *Υπόδειξη:* γράψτε $f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}$ και εφαρμόστε το παραπάνω ερώτημα σε συνδυασμό με το κριτήριο τού Eisenstein.

   (γ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x)=x^n+1\in\mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο αν και μόνον αν $n=2^k$ για κάποιον ακέραιο $k\geq 0$ (ίδια υπόδειξη με την παραπάνω).