

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 11

Άσκηση 11.1 Έστω T και U οι γραμμικές απεικονίσεις του \mathbb{R}^2 που ορίζονται σαν $T(x, y) = (y, x)$ και $U(x, y) = (x, 0)$. Δώστε τον τύπο και τον πίνακα των γραμμικών απεικονίσεων $(U + T), UT, TU, T^2, U^2$.

Άσκηση 11.2 Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ το χώρο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού το πολύ 2.

- (i) Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{x^2, x - 1, 2x\}$ είναι βάση του χώρου $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
- (ii) Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του πολυωνύμου $p(x) = 3x^2 - 6x - 2$ ως προς την βάση \mathcal{B} .

Άσκηση 11.3 Δείξτε ότι η απεικόνιση $L : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ με τύπο $L(f(x)) = f(x + 1) - f(x)$ είναι ένας επιμορφισμός διανυσματικών χώρων.

Άσκηση 11.4 Έστω $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Δείξτε ότι ο V έχει διάσταση 2 και βρείτε ισομορφισμούς $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ και $g : V \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Άσκηση 11.5

- (i) Έστω A, B υπόχωροι του \mathbb{R}^7 τέτοιοι ώστε $\dim A = 4$ και $\dim B = 5$. Δείξτε ότι $\dim A \cap B \geq 2$.
- (ii) Να βρεθούν υπόχωροι A_0, B_0 του \mathbb{R}^7 τέτοιοι ώστε $\dim A_0 = 4, \dim B_0 = 5$ και $\dim A_0 \cap B_0 = 2$.

Άσκηση 11.6 Έστω διανυσματικός χώρος V και δύο υπόχωροι του X και Y τέτοιοι ώστε $V = X \oplus Y$. Αν $v \in V$ και $v = x + y$, με $x \in X, y \in Y$, ορίζουμε την προβολή του V στον X παράλληλα στον Y ως $P : V \rightarrow V$ με $P(v) = x$. Δείξτε ότι $P^2 = P$. Δώστε ένα παράδειγμα μίας τέτοιας απεικόνισης P , όπου $V = \mathbb{R}^2$, και X, Y είναι υπόχωροι του \mathbb{R}^2 διάστασης 1.

Άσκηση 11.7 Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $f : V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f^2 = f$. Αποδείξτε τα παρακάτω:

- (i) $V = \ker f \oplus \text{Im } f$.
- (ii) Αν $y \in \text{Im } f$, δείξτε ότι $f(y) = y$.
- (iii) Αν $v = x + y$ με $x \in \ker f, y \in \text{Im } f$, τότε $f(x + y) = y$.