ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-23
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης, Μιχάλης Ταρουδάκης

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 7

Άσκηση 7.1 Αποδείξτε ότι αν V, W είναι τριδιάστατοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$, τότε V και W πρέπει να έχουν ένα κοινό μη μηδενικό διάνυσμα.

Άσκηση 7.2 Αν $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x+y = 0, z+3t = 0\}$ και $V = \{(x,\, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2y+t = 0\}$ προσδιορίστε βάσεις και διαστάσεις για τους χώρους $U, V, U \cap V$ και $U + V$.

Άσκηση 7.3 Θεωρουμε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^5$,

$$X = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 3x_1 = 2x_2 + x_3, x_4 = x_5\}.$$

(1) Βρείτε υπόχωρο $Y \subseteq \mathbb{R}^5$ τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^5 = X \oplus Y$.

(2) Βρείτε υπόχωρο $U \subseteq \mathbb{R}^5$ τέτοιο ώστε $(0, 1, 2, 1, 1) \in U$ και $\mathbb{R}^5 = X \oplus U$.

Άσκηση 7.4 Έστω $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ ο διανυσματικός χώρος των 3×3 πινάκων πάνω από το $\mathbb{R}$. Αν W ο υπόχωρος των άνω τριγωνικών πινάκων και U ο υπόχωρος των κάτω τριγωνικών πινάκων (βεβαιωθείτε ότι είναι υπόχωροι), βρείτε βάσεις και διαστάσεις για καθένα από τους W, U, $W \cap U$ και $W + U$.

Άσκηση 7.5 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές.

a. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \ f(x, y) = (3xy, 2y, x - y)$,

b. $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \ g(x, y, z) = (3x + y + 1, x - y + z)$,

c. $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \ h(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

d. $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ \ q(x, y, z) = x + y - z$.

Άσκηση 7.6 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις $T : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ είναι γραμμικές (με $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$),

a. $T(A) = A^t$,

b. $T(A) = A^2$,

c. $T(A) = AB$, όπου $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ είναι ένας σταθερός πίνακα.

Άσκηση 7.7 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις $T : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ είναι γραμμικές (με $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$),

a. $T(p(x)) = p'(x)$,

b. $T(p(x)) = xp(x)$,

c. $T(p(x)) = p(x+1)$,

Άσκηση 7.8 Δίνεται η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $T(x) = Ax$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

βρείτε τον τύπο της T (δηλ. $T(x, y, z)$). Εξετάστε εάν το διάνυσμα $(1, 2, 3)$ ανήκει στην εικόνα της T.

Άσκηση 7.9 Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$,

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_5, x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5, -2x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5).$$

Βρείτε έναν πίνακα A, τέτοιο ώστε $L(x) = Ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^5$.

Άσκηση 7.10 Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2 + x_4, x_2 + x_3 - x_4, x_1 + 4x_3 + x_4).$$

Βρείτε έναν πίνακα A, τέτοιο ώστε $L(x) = Ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^4$. Εξετάστε ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα (a, b, c, d) να ανήκει στην εικόνα της L.