ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-23
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης, Μιχάλης Ταρουδάκης

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Στο εργαστήριο να γίνουν οι ασκήσεις 5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8. Τις υπόλοιπες δείτε τις σπίτι και τις συζητάμε στην τάξη.

Άσκηση 5.1 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές.

(1) Το σύνολο $\{(1,2,0),(0,5,5),(-1,1,4)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

(2) Το σύνολο $\{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

(3) Το σύνολο $\{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ παράγει τον $\mathbb{R}^3$.

(4) Το σύνολο $\{(1,1,-1),(-2,1,1),(-2,7,-1)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

(5) Το σύνολο $\{(1,1,-1),(-2,1,1),(-2,7,-1)\}$ παράγει ένα υπόχωρο διάστασης 2.

Άσκηση 5.2 Στην 5.1 (1) δείξατε ότι το δοθέν σύνολο είναι βάση. Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $(0,13,17)$ και του $(2,3,1)$ ως προς αυτήν την βάση.

Άσκηση 5.3 Αν W είναι υπόχωρος του δ.χ. V και $\dim V = n$ δείξτε ότι $\dim W \leq n$.

Άσκηση 5.4 Δείξτε ότι τα διανύσματα $(3+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ και $(7, 1+2\sqrt{2})$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα πάνω από το $\mathbb{R}$ αλλά γραμμικώς ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{Q}$.

Άσκηση 5.5 Βρείτε *δύο* βάσεις του μηδενόχωρου και *δύο* βάσεις του χώρου στηλών του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ποιά είναι η τάξη του πίνακα; Ποιά είναι η διάσταση του μηδενόχωρου $\mathcal{N}(A)$; Ποιά είναι η διάσταση του χώρου γραμμών του A; Δώστε μία βάση για το χώρο γραμμών του.

Άσκηση 5.6

(1) Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να πληρούν τα b_1, b_2, b_3 ώστε το διάνυσμα $b = (b_1, b_2, b_3)$ να ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) Βρείτε την γενική λύση του $Ax = b$ όταν $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$.

(3) Βρείτε σύνολο διανυσμάτων $S \subseteq \mathbb{R}^4$ που να αποτελούν βάση του $\mathcal{N}(A)$.

(4) Δείξτε ότι το διάνυσμα $v = (-1,0,1,1)$ ανήκει στον $\mathcal{N}(A)$ και γράψτε το v σαν γραμ. συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης S που βρήκατε.

(5) Βρείτε βάση για το χώρο στηλών του πίνακα.

(6) Βρείτε βάση για το χώρο γραμμών του πίνακα.

Άσκηση 5.7 Αφού δείξετε ότι τα διανύσματα $\{(1,0,1,1),(1,0,2,4)\}$ του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα φτιάξτε μια βάση του $\mathbb{R}^4$ που να τα περιέχει.

Άσκηση 5.8 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(1) Υπάρχει πίνακας $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{R})$ του οποίου ο μηδενόχωρος έχει διάσταση 2 και ο χώρος στηλών παράγεται από 2 διανύσματα.

(2) Για κάθε πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{R})$, εάν $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^3$, τότε $\dim \mathcal{N}(A) = 2$.

(3) Υπάρχει τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, τέτοιος ώστε $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{N}(A) \neq \{0\}$.

(4) Υπάρχει γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων, $\{v_1,\dots,v_n\}$, του $\mathbb{R}^n$ και διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε το σύνολο $\{v_1,\dots,v_n,u\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

(5) Αν το σύνολο $\{v_1,\dots,v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και το σύνολο $\{v_1,\dots,v_m,u\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$, τότε $n = m$ και το σύνολο $\{v_1,\dots,v_m\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^m$.

(6) Αν ο μηδενόχωρος ενός 3 επί 4 πίνακα A παράγεται από το διάνυσμα $(2,3,1,0)$ τότε ο πίνακας έχει τάξη 2.

(7) Υπάρχει πίνακας A ώστε το διάνυσμα $(1,1,1)$ να ανήκει στο χώρο γραμμών και στο μηδενόχωρο του

Άσκηση 5.9 Δείξτε ότι $\langle (1,-1,0),(-1,1,1)\rangle = \langle (-1,1,3),(0,0,1)\rangle$.

Άσκηση 5.10 Βρείτε μία βάση για το επίπεδο $x-2y+3z=0$ στον $\mathbb{R}^3$. Στη συνέχεια βρείτε μία βάση της τομής του παραπάνω επιπέδου με το $x+y+z=0$. Τέλος βρείτε μια βάση για τον υπόχωρο των διανυσμάτων που είναι κάθετα στο αρχικό επίπεδο.

Άσκηση 5.11 Έστω V διανυσματικός χώρος και $\{v_1,v_2,v_3\}$ μία βάση του. Δείξτε ότι το σύνολο των ζευγών $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, των παραμέτρων a,b για τις οποίες το σύνολο $\{v_1+v_3, -v_2+2v_3, v_1+av_2+bv_3\}$ *δεν* είναι βάση του V, είναι μία ευθεία στον $\mathbb{R}^2$, την οποία να προσδιορίσετε.