ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-23
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης, Μιχάλης Ταρουδάκης

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 9

Άσκηση 9.1 Εάν $L : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ είναι η απεικόνιση $L(p) = xp'(x) + x^2p'(x)$ (όπου $p'(x)$ είναι η παράγωγος του πολυωνύμου $p(x)$) βρείτε τον πίνακα της L ως προς τις βάσεις

(i) $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}, \mathcal{C}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$,

(ii) $\mathcal{B}_2 = \{1 + x, x + x^2, x^2\}, \mathcal{C}_2 = \{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3\}$.

Άσκηση 9.2 Θεωρούμε τις βάσεις $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ και $\mathcal{C} = \{(1, 0, -1), (1, 2, 0), (1, 1, 2)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

(i) Υπολογίστε τους πίνακες αλλαγής βάσης από την $\mathcal{B}$ στην $\mathcal{C}$ και αντίστροφα.

(ii) Έστω $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε το $L(1, 1, 1)$.

Άσκηση 9.3 Δίνονται τα σύνολα $\mathcal{A} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ και $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (2, -1, 1), (0, 1, 2)\}$ και η γραμμική απεικόνιση με πίνακα $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$[L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Δείξτε ότι τα σύνολα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι βάσεις του $\mathbb{R}^3$.

(ii) Δείξτε ότι η L είναι ισομορφισμός.

(iii) Βρείτε τον τύπο της L^{-1}.

Άσκηση 9.4 Θεωρείστε τη βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τα διανύσματα $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 3), (1, -2, 2)\}$. Θεωρείστε επίσης τη γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, L(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_2, L(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

Να υπολογίσετε τον πίνακα του μετασχηματισμού $[L]_{\mathcal{B}}$ ως προς την βάση $\mathcal{B}$ καθώς και ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 9.5 Έστω διανυσματικοί χώροι V, W, U, η γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ και ισομορφισμοί $T : W \to W$ και $R : V \to V$. Δείξτε ότι

(i) $\dim \operatorname{im}(T \circ L) = \dim \operatorname{im} L$,

(ii) $\dim \ker(T \circ L) = \dim \ker L$,

(iii) $\dim \operatorname{im}(L \circ R) = \dim \operatorname{im} L$,

(iv) $\dim \ker(L \circ R) = \dim \ker L$.

Υπόδειξη: Για το (i) θεωρήστε την απεικόνιση $\tilde{T} : \operatorname{im}(L) \to \operatorname{im}(T \circ L)$ με τύπο $\tilde{T}(w) = T(w)$ για κάθε $w \in \operatorname{im}(L)$. Δείξτε ότι η $\tilde{T}$ είναι καλά ορισμένη (δηλαδή $\tilde{T}(w) \in \operatorname{im}(T \circ L)$ για κάθε $w \in \operatorname{im}(L)$) και στη συνέχεια δείξτε ότι είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 9.6 Δύο $m \times n$ πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι εάν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q, μεγέθους $n \times n$ και $m \times m$ αντίστοιχα, τέτοιοι ώστε $B = QAP$. Δείξτε ότι δύο ισοδύναμοι πίνακες έχουν την ίδια τάξη.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.