ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Θ. Γαρεφαλάκης - Μ. Ταρουδάκης

ΜΕΜ 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Στο εργαστήριο να γίνουν τουλάχιστον οι ασκήσεις 1.3,1.4,1.6,1.8,1.13,1.7,1.5 (με αυτή την σειρά) και όσες άλλες προλάβετε. Οι υπόλοιπες είναι για εξάσκηση στο σπίτι (φυσικά αν υπάρχουν απορίες θα χαρούμε να τις συζητήσουμε).

Άσκηση 1.1 Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ \pi/2 \\ \sqrt{2}/3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \pi/6 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 1.2 Υπολογίστε τα γινόμενα FGH και HGF (έχουμε παραλείψει τα μηδενικά πάνω από τη διαγώνιο):

$$F = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.3

a. Φτιάξτε τον 2×3 πίνακα $A = (a_{i,j})$ όπου $a_{i,j} = i + 2j$.

b. Φτιάξτε τον 3×3 πίνακα $B = (b_{i,j})$ όπου $b_{i,j} = i^2 + j^2$.

c. Υπολογίστε το γινόμενο AB.

Άσκηση 1.4 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τον πίνακα A^2. Δείξτε ότι $A^n = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 1.5 Βρείτε παραδείγματα πραγματικών 2×2 πινάκων που να ικανοποιούν

a. $A^2 = -I_2$,

b. $B^2 = O$ με $B \neq O$,

c. $CD = -DC$ με $CD \neq O$,

d. $EF = O$ χωρίς κανένα στοιχείο των E, F να είναι 0.

Άσκηση 1.6 Έστω $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε $3A = A^2 + AB$, όπου

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τον πίνακα A.

Άσκηση 1.7 Βρείτε τις δυνάμεις $A, A^2, A^3, \ldots, A^n$ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Άσκηση 1.8 Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Δείξτε ότι $A^3 - 3A^2 + 4I_3 = O$. Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφο του.

Άσκηση 1.9 Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $(AB)^t = B^tA^t$.

Άσκηση 1.10 Έστω $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος πίνακας. Δείξτε ότι $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Άσκηση 1.11 Έστω $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ δύο άνω (αντίστοιχα κάτω) τριγωνικοί πίνακες. Αποδείξτε ότι ο πίνακας AB είναι άνω (αντίστοιχα κάτω) τριγωνικός.

Άσκηση 1.12 Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, δείξτε ότι ένας 2 επι 2 πίνακας B μετατίθεται με τον A (δηλαδή ικανοποιεί $AB = BA$) αν και μόνο αν $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 1.13 Δίνεται ένας πίνακας $A \in Mat_n(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι

a. Ο $A + A^t$ είναι συμμετρικός.

b. Ο $A - A^t$ είναι αντισυμμετρικός.

c. Ο $A \cdot A^t$ είναι συμμετρικός.

d. Ο A γράφεται σαν άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Άσκηση 1.14 Αν A, B είναι 2 επί 2 πίνακες που το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης τους είναι ίσο με 1, δείξτε ότι και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του AB είναι ίσο 1. (Αυτή η άσκηση γενικεύεται για κάθε $n \times n$ πίνακες.)