Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητείστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Ας υποθέσουμε ότι η ΤΜ Y είναι πάντα $\le B$. Δείξτε ότι αν $a < B$ ισχύει

$$\mathbb{P}[Y \le a] \le \frac{\mathbb{E}[B-Y]}{B-a}.$$

2. Η ΤΜ X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 10]$. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της καθώς και την πιθανότητα $\mathbb{P}[X \ge 8]$. Έπειτα βρείτε τα άνω φράγματα γι' αυτή την πιθανότητα που προκύπτουν από τις ανισότητες Markov και Chebyshev.

3. Η ΤΜ X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 1, δηλ. $f_X(t) = \mathbb{1}(t \ge 0)\, e^{-t}$. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της καθώς και την πιθανότητα $\mathbb{P}[X \ge 3]$. Έπειτα βρείτε τα άνω φράγματα γι' αυτή την πιθανότητα που προκύπτουν από τις ανισότητες Markov και Chebyshev.

4. Η ΤΜ X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $B(n,p)$. Αν $p < \alpha < 1$ βρείτε ένα άνω φράγμα, με την ανισότητα Markov, για την $\mathbb{P}[X \ge \alpha n]$ και υπολογίστε το για $p = 1/2$ και $\alpha = 3/4$.

5. Επαναλάβετε το Πρόβλημα 4 αλλά τώρα χρησιμοποιείστε την ανισότητα Chebyshev.

6. Έστω k φυσικός αριθμός και υποθέστε ότι υπάρχει η μέση τιμή $M = \mathbb{E}\left[|X-\mu|^k\right]$ για την ΤΜ X με μέση τιμή $\mu = \mathbb{E}[X]$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[|X-\mu| \ge \lambda] \le \frac{M}{\lambda^k},$$

για $\lambda > 0$.

7. Έστω X μια ΤΜ με $\mathbb{E}[X] = \mu$ και $\sigma^2(X) = \sigma^2$ και ας είναι $a > 0$. Δείξτε τις ανισότητες

$$\mathbb{P}[X \ge \mu + a] \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}, \quad \mathbb{P}[X \le \mu - a] \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

Ορίστε την ΤΜ $Y = X - \mu$ που έχει μέση τιμή 0 και $\sigma^2(Y) = \sigma^2$. Αν t είναι μια πραγματική παράμετρος, $t > -a$, βρείτε άνω φράγμα για την πιθανότητα

$$\mathbb{P}[Y \ge a] = \mathbb{P}[Y + t \ge a + t] = \mathbb{P}\left[\frac{Y+t}{a+t} \ge 1\right]$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov. Το φράγμα αυτό ισχύει για κάθε t οπότε αυτό που απομένει να γίνει είναι να επιλέξετε εκείνο το t που δίνει το μικρότερο άνω φράγμα.

8. Αν X είναι μια πραγματική ΤΜ η *ροπογεννήτρια συνάρτηση της* X είναι η συνάρτηση

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right], \quad \text{για τα } t \in \mathbb{R} \text{ για τα οποία υπάρχει η μέση τιμή.}$$

(1) Παρατηρείστε ότι αν η X είναι φραγμένη (ικανοποιεί δηλ. $|X| \le B$ για κάποιο $B > 0$) τότε η $M_X(t)$ ορίζεται για όλα τα X. Μπορείτε να υποθέσετε γνωστό ότι η μέση τιμή μιας φραγμένης ΤΜ υπάρχει.

(2) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτησης μιας ΤΜ X που ακολουθεί κατανομή Bernoulli με παράμετρο p (αυτό σημαίνει ότι $X = 1$ με πιθανότητα p και $X = 0$ με πιθανότητα $1-p$). Το ίδιο για μια ΤΜ που ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p.

(3) Υποθέστε ότι η ΤΜ X είναι τέτοια ώστε η ροπογεννήτριά της να υπάρχει για όλα τα $t \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ που συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, και υποθέτοντας ότι η γραμμικότητα της μέσης τιμής ισχύει και για άπειρες σειρές (σε αυτή την περίπτωση ισχύει) όπως επίσης και ότι μπορείτε να παραγωγίσετε μια δυναμοσειρά κατά όρους δείξτε ότι

$$M_X(0) = 1,\ M_X'(0) = \mathbb{E}[X],\ M_X''(0) = \mathbb{E}\left[X^2\right], \ldots.$$

(4) Αν $S = X_1 + \cdots + X_n$ και οι $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες δείξτε ότι

$$M_S(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t).$$

Χρησιμοποιείστε αυτό για να υπολογίσετε ξανά τη ροπογεννήτρια της διωνυμικής κατανομής μέσω της ροπογεννήτριας της κατανομής Bernoulli.