Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητείστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Η ΤΜ X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 1 (δηλ. $f_X(x) = \mathbb{1}(x \ge 0)\, e^{-x}$) και η ΤΜ S παίρνει τις τιμές ± 1 με ίση πιθανότητα 1/2. Οι X και S είναι ανεξάρτητες. Βρείτε τη συνάρτηση κατανομής, την πυκνότητα, τη μέση τιμή και τη διασπορά της $Z = SX$.

2. Έστω X και Y δύο ΤΜ. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι *δεύτερες ροπές* $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ και $\mathbb{E}\left[Y^2\right]$ (το οποίο συνεπάγεται ότι υπάρχουν και οι πρώτες ροπές $\mathbb{E}[X]$ και $\mathbb{E}[Y]$). Ας είναι S μια ΤΜ που παίρνει τις τιμές 0 και 1 με πιθανότητες $1-p$ και p αντίστοιχα και η οποία είναι ανεξάρτητη και από την X και από την Y. Ορίζουμε την ΤΜ Z ως εξής:

$$Z = \begin{cases} X & \text{αν } S = 0 \\ Y & \text{αν } S = 1. \end{cases}$$

Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της Z μέσω των ποσοτήτων $p, \mathbb{E}[X], \mathbb{E}\left[X^2\right], \mathbb{E}[Y], \mathbb{E}\left[Y^2\right]$.

3. Ας είναι X μια ΤΜ ομοιόμορφα κατενεμημένη στο σύνολο

$$\{1, 2, \ldots, n\}.$$

Ποια η μέση τιμή της και ποια η διασπορά της; Ποιες η αντίστοιχες τιμές αν η ΤΜ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $\{a, a+1, \ldots, b\}$.

4. Έχουμε ένα συνηθισμένο ζάρι κι ένα οκταεδρικό ζάρι, ένα ζάρι δηλ. που οι 8 έδρες του αντιστοιχούν στους αριθμούς 1 έως 8 οι οποίοι εμφανίζονται με ίση πιθανότητα όταν ρίχνουμε το ζάρι.

Ρίχνουμε ένα τίμιο νόμισμα. Αν το νόμισμα έρθει κορώνα ρίχνουμε το συνηθισμένο ζάρι, αλλιώς ρίχνουμε το οκταεδρικό ζάρι. Το κέρδος μας είναι το αποτέλεσμα του (όποιου) ζαριού σε ευρώ. Ποιο το μέσο κέρδος μας και ποια η τυπική του απόκλιση;

5. Έχουμε ένα νόμισμα που έρχεται κορώνα με πιθανότητα p, την οποία δε γνωρίζουμε. Γνωρίζουμε όμως ότι το p είναι πολλαπλάσιο του 0.1. Ρίχνουμε το νόμισμα 7 φορές και παίρνουμε τα αποτελέσματα ΚΓΚΓΚΚΚ. Σκοπός μας είναι να κάνουμε μια εκτίμηση για την ποσότητα p. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να έχουμε ένα μετρήσιμο τρόπο να υπολογίζουμε πόσο καλή είναι η εκτίμησή μας. Το κριτήριό μας είναι η ποσότητα (συνάρτηση του p)

$$L(p) = \mathbb{P}\left[\text{αποτέλεσμα 7 ρίψεων είναι ΚΓΚΓΚΚΚ}\right].$$

Η ποσότητα αυτή ονομάζεται *πιθανοφάνεια* (likelihood) του p και είναι προφανώς συνάρτηση του p και του αποτελέσματος που παρατηρήσαμε. Το $L(p)$ μας λέει πόσο πιθανό είναι το αποτέλεσμα που είδαμε αν η άγνωστη παράμετρος είναι η p.

Σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα $L(p)$ επιλέγοντας το κατάλληλο p (υπό τον περιορισμό ότι πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 0.1).

Υπολογίστε την ποσότητα $L(p)$ για το δεδομένο αποτέλεσμα και βρείτε ποια είναι η τιμή του p που τη μεγιστοποιεί. Θα δείτε ότι αυτή η τιμή δεν είναι πολλαπλάσιο του 0.1 (όπως απαιτεί το πρόβλημα) οπότε θα πρέπει να ελέγξετε με άλλο τρόπο (π.χ. με ένα απλό υπολογισμό) το ποια από τις επιτρεπτές τιμές μεγιστοποιεί το $L(p)$.

6. Έχετε μπροστά σας ένα τσουβάλι με λαχνούς, αριθμημένους από το 1 έως το N, το οποίο δε γνωρίζετε και θέλετε να το εκτιμήσετε. Βάζετε το χέρι σας στο τσουβάλι, τραβάτε ένα λαχνό, καταγράφετε τον αριθμό του και τον επιστρέφετε. Το επαναλαμβάνετε αυτό 5 φορές και οι αριθμοί που βλέπετε είναι οι

$$10, 15, 11, 14, 15.$$

Σκοπός σας είναι να επιλέξετε ως (εκτίμησή σας για την) τιμή του N εκείνο τον αριθμό που μεγιστοποιεί την πιθανότητα του να βγει αυτό το δείγμα αριθμών που βλέπετε. (Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα αυτό λέγεται εκτίμηση *μέγιστης πιθανοφάνειας*.)

Ποια πρέπει να είναι η επιλογή σας για το N;

7. Συζητείστε το παρακάτω πρόβλημα:

> Στα χέρια μου έχω ένα ποσό και το διπλάσιό του. Δεν ξέρετε ποιο είναι αυτό το ποσό.
>
> Επιλέγετε στην τύχη ένα από τα δύο μου χέρια, το ανοίγω και βλέπετε ένα ποσό, ας πούμε 1 ευρώ. Και σας δίνω τη δυνατότητα να πάρετε το 1 ευρώ ή να πάρετε αυτό που είναι στο άλλο χέρι (πριν σας το ανοίξω φυσικά).
>
> Τι θα κάνετε;

Ιδού μια προσέγγιση:

«Ας ονομάσουμε X το ποσό που παίρνουμε τελικά παίζοντας το παιχνίδι αυτό. Σκοπός μας είναι φυσικά να μεγιστοποιήσουμε το μέσο κέρδος, την ποσότητα δηλ. $\mathbb{E}[X]$. Η μια επιλογή του πώς παίζουμε είναι να πάρουμε το ένα ευρώ, οπότε το κέδρος μας είναι 1 ευρώ. Αν όμως επιλέξουμε το άλλο χέρι, όπως μας δίνεται το δικαίωμα να κάνουμε, τότε το άλλο χέρι θα έχει μισό ευρώ με πιθανότητα 1/2 και 2 ευρώ με πιθανότητα πάλι 1/2. Οπότε θα έχουμε $\mathbb{P}[X = 0.5] = \mathbb{P}[X = 2] = 1/2$ και άρα $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}2 = 1.25$, άρα μεγαλύτερο του 1, οπότε μας συμφέρει να αλλάξουμε χέρι.»

Τι λέτε;