

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητείστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Αν $m \leq a_j \leq M$ για κάθε j και $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός των a_j (δηλ. $\forall j \lambda_j \in [0, 1]$ και $\sum \lambda_j = 1$) τότε δείξτε ότι

$$m \leq x \leq M.$$

Συμπεράνετε ότι αν μια ακέραια ΤΜ X ικανοποιεί πάντα $m \leq X \leq M$ τότε ισχύει και

$$m \leq \mathbf{E}X \leq M.$$

Γιατί υπάρχει πάντα η μέση τιμή της X υπό αυτές τις υποθέσεις;

2. Αν η X ακολουθεί κατανομή Poisson(λ), για κάποιο $\lambda > 0$, αν δηλ.

$$f_X(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{1}(n \geq 0)$$

δείξτε ότι $\mathbf{E}X = \lambda$.

3. Δείξτε ότι αν η σταθερά $C > 0$ οριστεί κατάλληλα τότε η συνάρτηση $f(n) = \frac{C}{n^2} \mathbb{1}(n \geq 1)$ είναι πυκνότητα πιθανότητας και ότι οποιαδήποτε ΤΜ με πυκνότητα $f_X \equiv f$ δεν έχει μέση τιμή $\mathbf{E}X$.

4. Αν η πυκνότητα της X είναι συμμετρική ως προς το σημείο $x \in \mathbb{R}$, αν δηλ. ισχύει

$$f(n) = f(2x - n), \forall n \in \mathbb{Z},$$

τότε, αν υπάρχει η $\mathbf{E}X$ έχουμε $\mathbf{E}X = x$.

5. (α) Δώστε παράδειγμα μιας πυκνότητας $f(x)$ για την οποία δεν υπάρχει η μέση τιμή, δηλ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x) dx = +\infty.$$

(β) Επίσης δώστε παράδειγμα μιας πυκνότητας $f(x)$ για την οποία υπάρχει η μέση τιμή (το προηγούμενο ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο) αλλά δεν υπάρχει η μέση τιμή $\mathbf{E}X^2$ για μια ΤΜ X που έχει την f ως πυκνότητα.

(γ) Τέλος δείξτε ότι αν υπάρχει η μέση τιμή $\mathbf{E}X^2$ τότε υπάρχει και η μέση τιμή $\mathbf{E}X$ όπως και η $\mathbf{E}|X|$.

6. Εξηγήστε:

Μια ιστορία από τη Νέα Υόρκη.

Ένας νεαρός ζει στο Manhattan κοντά σ' ένα σταθμό του μετρό. Έχει δύο φίλες, μια στο Brooklyn και μια στο Bronx. Για να επισκεφθεί τη φίλη του στο Brooklyn παίρνει το τρένο από τη μια μεριά της αποβάθρας ενώ για να επισκεφθεί τη φίλη του στο Bronx παίρνει το τρένο από την άλλη μεριά της ίδιας αποβάθρας.

Επειδή και οι δύο του είναι εξίσου αγαπητές όταν πάει στο σταθμό απλά παίρνει το πρώτο τρένο που θα περάσει, είτε προς το Brooklyn είτε προς το Bronx. Ο νεαρός πηγαίνει στο σταθμό του τρένου μια τυχαία στιγμή κάθε Σάββατο απόγευμα. Τα τρένα για Brooklyn και Bronx περνάνε και τα δύο κάθε 10 λεπτά.

Αλλά για κάποιο λόγο, συνειδητοποιεί μετά από κάποιο καιρό, περνάει τον περισσότερο χρόνο του με τη φίλη του στο Brooklyn. Για την ακρίβεια καταλήγει να πηγαίνει στο Brooklyn 9 φορές στις 10 και μόνο 1 φορά στις 10 (κατά μέσο όρο) πηγαίνει στο Bronx. Γιατί συμβαίνει αυτό;