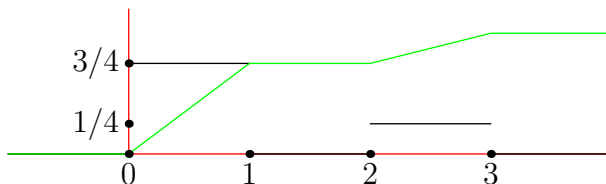


Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητήστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Ρίχνουμε δύο κοινά ζάρια και έστω X η ΤΜ που ισούται με το μέγιστο από τα δύο αποτελέσματα. Βρείτε την πυκνότητα πιθανότητας της X .
2. Ρίχνουμε ένα τίμιο νόμισμα έως ότου έρθει κορώνα. Έστω N ο αριθμός φορών που το ρίξαμε. Βρείτε την πυκνότητα πιθανότητας και τη συνάρτηση κατανομής της ΤΜ N .
3. Ρίχνουμε ένα κοινό ζάρι 3 φορές και έστω S το πόσα εξάρια φέραμε. Βρείτε την πυκνότητα πιθανότητας της S . Ποια η πυκνότητα της S^2 ;
4. Ρίχνουμε n τίμια νομίσματα. Όποιο από αυτά δείξει γράμματα το ξαναρίχνουμε άλλη μια φορά (δε συνεχίζουμε). Έστω X το πόσα δείχνουν κορώνα μετά το τέλος της διαδικασίας αυτής. Ποια η πυκνότητα της X ;
5. Η ΤΜ X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} 3/4 & \text{για } 0 \leq x \leq 1 \\ 1/4 & \text{για } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Σχεδιάστε το γράφημα της f και υπολογίστε και σχεδιάστε τη συνάρτηση κατανομής $F(x)$.



ΣΧΗΜΑ 1. Το γράφημα της f_X (μαύρο) και της F_x (πράσινο).

Η συνάρτηση κατανομής F_X είναι τμηματικά γραμμική με κλίση την αντίστοιχη τιμή της f_X . Είναι σχεδιασμένη με πράσινο

6. Αν η ΤΜ Y έχει συνάρτηση κατανομής $F_Y(x) = x^2$ για $0 \leq x \leq 1$ ποια είναι η πιθανότητα $\mathbb{P}[\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{3}{4}]$; Ποια η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(x)$;

7. Η ΤΜ X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[a, b]$. Αυτό σημαίνει ότι $f_X(x) = 0$ εκτός του $[a, b]$ και είναι σταθερή μέσα στο $[a, b]$. Βρείτε ένα τύπο για τη συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$.

8. Η ΤΜ X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο σύνολο $E = [0, 1] \cup [2, 4]$. Αυτό σημαίνει ότι πάντα $X \in E$ και επίσης αν $I, J \subseteq E$ είναι δύο διαστήματα ίσου μήκους τότε ισχύει

$$\mathbb{P}[X \in I] = \mathbb{P}[X \in J].$$

Βρείτε την πυκνότητα πιθανότητας της X .

9. Η ΤΜ X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 1]$ και $0 < p < 1$. Ορίζουμε την ΤΜ

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{αν } X \geq p \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής της Y ; Ποια είναι η κατανομή της $Z = 3X + 5$;

10. Η ΤΜ X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 1]$. Αν $Y = -\ln X$ ποια είναι η πυκνότητα πιθανότητας της Y ;