

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητήστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Ας είναι A, B, C τρία ενδεχόμενα. Δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B|A] \cdot \mathbb{P}[C|A \cap B].$$

Δείξτε επίσης ότι $\mathbb{P}[A|B] \geq \mathbb{P}[A]$ αν και μόνο αν $\mathbb{P}[B|A] \geq \mathbb{P}[B]$. Ένας τρόπος να ερμηνεύσουμε (όχι να αποδείξουμε) την τελευταία ισοδυναμία είναι ότι το να γνωρίζουμε ότι ισχύει το B επηρεάζει θετικά την πιθανότητα να ισχύει το A αν και μόνο αν το να γνωρίζουμε ότι ισχύει το A επηρεάζει θετικά το να ισχύει το B .

2. Ένα δοχείο περιέχει 5 άσπρες και 4 μαύρες μπάλες. Ένα άλλο δοχείο περιέχει 7 άσπρες και 9 μαύρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μια μπάλα από το πρώτο δοχείο και τη βάζουμε στο δεύτερο. Έπειτα επιλέγουμε τυχαία μια μπάλα από το δεύτερο δοχείο. Ποια η πιθανότητα η τελευταία αυτή μπάλα να είναι άσπρη;



Ονομάστε B το ενδεχόμενο να μεταφέρατε μαύρη μπάλα στο πρώτο βήμα της διαδικασίας και W το ενδεχόμενο να επιλέξατε άσπρη μπάλα στο δεύτερο βήμα. Χρησιμοποιείστε τον τύπο ολικής πιθανότητας για τον υπολογισμό του $\mathbb{P}[W]$ ως προς τη διαμέριση $\Omega = B \cup B^c$.

3. Ένας φοιτητής βρίσκεται αντιμέτωπος με μια ερώτηση πολλαπλών επιλογών. Έχει N επιλογές μια από τις οποίες είναι η σωστή. Αν ο φοιτητής ξέρει τη σωστή απάντηση την επιλέγει. Αν όχι επιλέγει μια απάντηση τυχαία. (Εννοείται εδώ ότι ο φοιτητής γνωρίζει τότε γνωρίζει τη σωστή απάντηση.)

Ας πούμε ότι η πιθανότητα να γνωρίζει ο φοιτητής την απάντηση είναι p .

(1) Ποια η πιθανότητα να βρει τη σωστή απάντηση ο φοιτητής.

(2) Αν υποθέσουμε ότι ο φοιτητής βρήκε τη σωστή απάντηση ποια η πιθανότητα να τη γνώριζε (και να μην το έπαιξε στην τύχη);

Υπολογίστε τα δύο παραπάνω ερωτήματα και στην περίπτωση που $p = 1/2$ και εξηγήστε πώς ο αριθμός N επηρεάζει τις δύο αυτές ποσότητες.



Ορίστε τα δύο ενδεχόμενα K (ο φοιτητής ξέρει την απάντηση) και C (ο φοιτητής επιλέγει τελικά τη σωστή απάντηση). Χρησιμοποιείστε τον τύπο ολικής πιθανότητας για το πρώτο ερώτημα και τον τύπο του Bayes για το δεύτερο.

4. «Έστω ένας τυχαίος φυσικός αριθμός», ξεκινάει την κουβέντα ο φίλος σας. «Τι εννοείς;», τον ρωτάτε. «Ό,τι εννοούμε συνήθως, ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί έχουν την ίδια πιθανότητα», απαντά.

Εξηγήστε του ότι αυτό δεν έχει νόημα.

5. Ρίχνουμε ένα ζάρι άπειρες φορές και παίρνουμε έτσι τα αποτελέσματα X_1, X_2, \dots , με $X_j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ για $j = 1, 2, \dots$. Ας είναι E το ενδεχόμενο να μη δούμε ποτέ στην ακολουθία αυτή τη λέξη 123. Με άλλα λόγια, το ενδεχόμενο E ισχύει αν και μόνο αν για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $X_n X_{n+1} X_{n+2} \neq 123$. Δείξτε ότι $\mathbb{P}[E] = 0$.



Αν συμβαίνει το E τότε ισχύουν και τα ενδεχόμενα $E_n = \{X_n X_{n+1} X_{n+2} \neq 123\}$ για $n = 1, 4, 7, 10, \dots$. Δηλαδή

$$E \subseteq \bigcap_{k \geq 0} E_{3k+1}.$$

Παρατηρείστε ότι τα ενδεχόμενα αυτά (που συμμετέχουν στην τομή) είναι ανεξάρτητα αφού το καθένα εξαρτάται από διαφορετικές ρίψεις του ζαριού. Άρα η πιθανότητα του E είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων τους.

6. Έστω $0 \leq a_n \leq 1$ ακολουθία αριθμών. Δείξτε ότι

$$0 = \prod_{n=1}^{\infty} a_n \quad \left(= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n \right)$$

αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) = \infty$.



Πάρτε λογαρίθμους και χρησιμοποιήστε την ανισότητα

$$2(x - 1) \leq \log x \leq x - 1,$$

που ισχύει για $\theta \leq x \leq 1$ (θ είναι κάποιος αριθμός στο $(0, 1)$ που δε χρειάζεται να τον γνωρίζουμε ακριβώς).

Δε χρειάζονται πιθανότητες γι' αυτή την άσκηση, αλλά αυτή η ισοδυναμία είναι πολύ χρήσιμη στις πιθανότητες.

7. Ας είναι $E_1, E_2, \dots \subseteq \Omega$ μια άπειρη ακολουθία ενδεχομένων και έστω ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_n] < \infty.$$

(Για παράδειγμα, μπορεί να ισχύει $\mathbb{P}[E_n] \leq 1/n^2$.) Ορίζουμε το ενδεχόμενο E να είναι το να συμβαίνουν άπειρα από τα E_n (το έχουμε ξαναδεί στο Φυλλάδιο 1 ως το \limsup της ακολουθίας E_n). Δείξτε ότι $\mathbb{P}[E] = 0$.



Αν $\omega \in E$ τότε το ω ανήκει σε άπειρα από τα E_n , άρα ανήκει σε όλα τα ενδεχόμενα

$$T_k = \bigcup_{n \geq k} E_n, \quad (\text{για κάθε } k = 1, 2, 3, \dots).$$

Έπεται ότι το E είναι υποσύνολο όλων των T_k και άρα (μονοτονία της συνολοσυνάρτησης πιθανότητας) $\mathbb{P}[E] \leq \mathbb{P}[T_k]$, για κάθε k . Χρησιμοποιείστε την υποαθροιστικότητα της συνολοσυνάρτησης πιθανότητας καθώς και το ότι η σειρά στην υπόθεση του προβλήματος είναι πεπερασμένη για να δείξετε ότι $\mathbb{P}[T_k] \rightarrow 0$. Θυμίζουμε ότι αν $a_n \geq 0$ και $\sum_{n \geq 1} a_n < \infty$ τότε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \geq k} a_n = 0.$$

(Η ουρά συγκλίνουσας σειράς δηλ. τείνει στο 0.)

8. Έχουμε ένα νόμισμα που φέρνει κορώνα με πιθανότητα $p \in (0, 1)$ και γράμματα με πιθανότητα $1 - p$. Ρίχνουμε το νόμισμα 2 φορές. Αν τα δύο αποτελέσματα είναι διαφορετικά, ποια η πιθανότητα το πρώτο νόμισμα να είναι κορώνα; Μπορείτε χρησιμοποιώντας αυτό το νόμισμα (το p δεν το γνωρίζετε) και ρίχνοντάς το ενδεχομένως αρκετές φορές να «προσομοιώσετε» ένα τίμιο νόμισμα; Με άλλα λόγια μπορείτε χρησιμοποιώντας αυτό το νόμισμα να στήσετε ένα πείραμα που θα έχει δύο ισοπίθανα αποτελέσματα;

9. Το παρακάτω πρόγραμμα σε python προσομοιώνει την παραγωγή τυχαίων στοιχείων από το $\{1, 2, \dots, N\}$ με δοσμένες πιθανότητες $p_j, j = 1, 2, \dots, N$. Ξεκινά από την παραγωγή τυχαίων αριθμών στο διάστημα $[0, 1]$ με την ομοιόμορφη κατανομή με τη συνάρτηση `random.uniform(0, 1)`. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση αυτή παράγει ένα τυχαίο αριθμό στο διάστημα $(a, b) \subseteq [0, 1]$ με πιθανότητα που εξαρτάται μόνο από το μήκος του διαστήματος $b - a$.

Για να το πετύχουμε αυτό αντιστοιχούμε σε κάθε ένα από τους αριθμούς $j = 1, 2, \dots, N$ ένα διάστημα στο $[0, 1]$ μήκους p_j , και ως είναι $x_0 = 0, x_1 = p_1, x_2 = x_1 + p_2, x_3 = x_2 + p_3, \dots, x_N = 1$ τα σημεία που ορίζουν αυτά τα διαστήματα.

Πετάμε λοιπόν ένα τυχαίο σημείο r στο $[0, 1]$ και αν πέσει μέσα στο διάστημα $[x_{j-1}, x_j]$ τότε θεωρούμε ότι παρήχθη το τυχαίο σημείο j ως αποτέλεσμα του πειράματος. Έτσι ο ακέραιος j παράγεται με πιθανότητα ακριβώς p_j αφού το r πέφτει σε ένα διάστημα $(a, b) \subseteq [0, 1]$ με πιθανότητα ακριβώς $b - a$.

Αν δεν έχετε python 3 εγκατεστημένη τον υπολογιστή σας μπορείτε να τρέξετε αυτό το πρόγραμμα και να παίξετε με αυτό online, π.χ. στο <https://repl.it/@kolount/samplepy>

Το πρόγραμμα αυτό δείχνει πώς παράγουμε ένα από N σημεία με δοσμένες πιθανότητες.

Ξεκινά από παραγωγή αριθμών ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ με τη συνάρτηση `random.uniform(0,1)`

```
import random
```

```
k = 10000 # Παράγουμε τόσα σημεία με την επιθυμητή κατανομή
```

```
P = [0.1, 0.2, 0.05, 0.05, 0.3, 0.2, 0.1] # Αυτές είναι οι επιθυμητές πιθανότητες των 1, 2, ..., N.
```

```
# Το άθροισμά τους πρέπει να είναι 1.
```

```
N = len(P) # Το πλήθος των σημείων στο δειγματικό χώρο  $\Omega = 1, 2, \dots, N$ 
```

```
x = [0] # Η λίστα x θα έχει μήκος N+1, με το πρώτο σημείο να είναι το 0 και το τελευταίο να είναι το 1.
```

```
pointer = 0 # Ξεκινά από το αριστερό άκρο του  $[0,1]$  και καταλήγει στο δεξί άκρο
```

```
for p in P:
```

```
    pointer += p
```

```
    x.append(pointer) # εδώ υπολογίζουμε τα ενδιάμεσα σημεία του  $[0,1]$  που ορίζουν τα διαστήματα
```

```
total = [0]*(N+1) # μετράμε εδώ πόσες φορές παρήχθη ο ακέραιος j. Είναι αρχικά μια λίστα από μηδενικά.
```

```
for i in range(k): # Εκτελούμε το πείραμα k φορές
```

```
    r = random.uniform(0., 1.) # παράγουμε τυχαίο σημείο r στο  $[0,1]$ 
```

```
    j = 1
```

```
    while x[j]<r: # και προχωράμε από αριστερά προς τα δεξιά μέχρι να βρούμε σε ποιο διάστημα έπεσε.
```

```
        j += 1
```

```
    total[j] += 1 # αφού βρούμε πού έπεσε αυξάνουμε κατά ένα το πόσα σημεία έπεσαν στο διάστημα αυτό
```

```
print("Συχνότητες που παρήχθησαν:")
```

```
for i in range(1, N+1):
```

```
    print("{} {}παρήχθη με {}συχνότητα {} {}επιθυμητή {}πιθανότητα {}".format(i, total[i]/k, P[i-1]))
```

Ένα τυπικό output του προγράμματος είναι π.χ.

Συχνότητες που παρήχθησαν:

```
1 παρήχθη με συχνότητα 0.0996, επιθυμητή πιθανότητα 0.1
2 παρήχθη με συχνότητα 0.2027, επιθυμητή πιθανότητα 0.2
3 παρήχθη με συχνότητα 0.0506, επιθυμητή πιθανότητα 0.05
4 παρήχθη με συχνότητα 0.0453, επιθυμητή πιθανότητα 0.05
5 παρήχθη με συχνότητα 0.2956, επιθυμητή πιθανότητα 0.3
6 παρήχθη με συχνότητα 0.2062, επιθυμητή πιθανότητα 0.2
7 παρήχθη με συχνότητα 0.1, επιθυμητή πιθανότητα 0.1
```