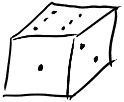
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ρίψη ενός ζαριού



$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & & & 6 \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \\ \tfrac{1}{6} & \tfrac{1}{6} & & \cdots & \tfrac{1}{6} \end{array}$$

✓ E_1 = "αποτέλεσμα είναι άρτιος" $\qquad E_1 = \underline{\{2, 4, 6\}}$

$$\mathbb{P}(E_1) = p(2) + p(4) + p(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

E_1^c = "αποτέλεσμα περιττό" $\qquad E_1^c = \{1, 3, 5\}$

$$\mathbb{P}(E_1^c) = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(E_1^c) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_1^c) = 1$$

✓ E_2 = "αποτέλεσμα ≤ 3" $\qquad E_2 = \underline{\{1, 2, 3\}}$

$$E_1 \cap E_2 = \{2\} \Rightarrow \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$$

$$E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 3, 4, 6\} = \{5\}^c \Rightarrow \mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \frac{5}{6}$$

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

✓

Παράδειγμα: δύο ζάρια

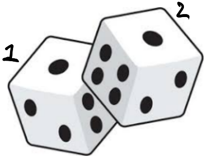
N φορές το πείραμα

$p(a,b)$

$\sim p(a)N$ φορές φέρνει το Z_1 αποτ. a

$\sim p(b)p(a)N$ το Z_2 φέρνει b

$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$



Ρίχνουμε δύο ζάρια. Αποτελέσματα z_1, z_2.

$\Omega = \{(a,b) : a,b = 1,2,\ldots,6\}$ (36 δυνατά αποτελέσματα)

Συμμετρικά ζάρια $\Longrightarrow$ όλα τα αποτελέσματα ισοπίθανα: $p(a,b) = \frac{1}{36}$.

Παράδειγμα: δύο ζάρια. Κάποια ενδεχόμενα.

$p(a,b) = \frac{1}{36}$

Ρίχνουμε δύο ζάρια. Αποτελέσματα z_1, z_2.

$\{z_1 = z_2\} = \{(1,1), (2,2), \ldots, (6,6)\}$

$\mathbb{P}[z_1 = z_2] = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

$\{z_1 = 2\} = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$

$\mathbb{P}[z_1 = 2] = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}[z_1 + z_2 = 8] = \mathbb{P}\left(\{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}\right) = 5 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$

Παράδειγμα: διαδοχικά νομίσματα.

Κ Γ Κ Γ

Ρίχνουμε ένα <u>τίμιο</u> νόμισμα n φορές.

$\Omega =$ όλες οι n-άδες από Κ ή Γ στην κάθε θέση

$\omega = \text{ΚΚΓΓΚΓ}\ldots\text{Γ} \rightarrow p(\omega) =$

Ποια η κατανομή της πιθανότητας στα αποτελέσματα;

$p(\omega) = \frac{1}{2^n}$, ομοιόμορφη κατανομή

N φορές

$\frac{1}{2} N$ το $1^o \rightarrow$ Κ

$\frac{1}{2}\frac{1}{2} N$ και το $2^o \rightarrow$ Κ

$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} N$ και το $3^o \rightarrow$ Γ

$\vdots$

$\frac{1}{2^n} N$ φορές θα έχω το αποτέλεσμα ω

άρα $p(\omega) = \frac{1}{2^n}$

Παράδειγμα: διαδοχικά νομίσματα. Κάποια ενδεχόμενα.

Ρίχνουμε ένα τίμιο νόμισμα n φορές.

$$\mathbb{P}\left[3\eta \text{ ρίψη είναι K}\right] = \mathbb{P}(\overbrace{* * K * \cdots *}^{n}) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}\left[1\eta \text{ και } 2\eta \text{ ρίψη είναι ίδιες}\right] = \mathbb{P}(\times \times * * * \cdots *) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(KKK * * \cdots *) = \frac{1}{8}$$

N φορές

$\frac{1}{2}N$ περίπου φορές $3^o \to K$

$\frac{1}{2}N$ $1^o \to K$

$\frac{1}{2}\frac{1}{2}N$ και το $2^o \to K$

$\frac{1}{2}N$ $1^o \to Γ$

$\frac{1}{2}\frac{1}{2}N$ και το $2^o \to Γ$

σύνολο $\frac{1}{2}N$

Παράδειγμα: κάνουμε παιδιά μέχρι να κάνουμε αγόρι.

$$1 = p(A) + p(KA) + p(KKA) + \cdots + p(+\infty) = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots}}_{=1} + 0$$

Κάνουμε παιδιά μέχρι να κάνουμε αγόρι και τότε σταματάμε.

$\Omega = \{A, KA, KKA, KKKA, \ldots, KK\cdots KA, \ldots, +\infty\}$

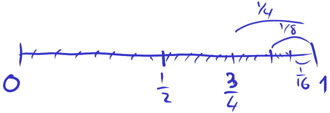
- Αγόρι και κορίτσι *ισοπίθανα* σε κάθε γέννα.
- «Ανεξαρτησία»: το αποτέλεσμα της μιας γέννας δεν επηρεάζει τις άλλες.

Αν $k \geq 1$ ποια η πιθανότητα να κάνει το ζευγάρια ακριβώς k παιδιά; $\overbrace{K\cdots K}^{k-1}A$

$$p(\underbrace{KK\cdots K}_{k-1}A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$$

Παρένθεση: το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$



Πόσο κάνει $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots;$ $= 2$

$$xS = \overbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x}^{S}{}^{n+1} - 1$$

$$xS = S + x^{n+1} - 1$$

$$(x-1)S = x^{n+1} - 1 \qquad (x \neq 1)$$

$$S = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad (|x|<1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right) = \lim \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$|x| < 1$ — — 0 — — $\lim = \frac{1}{1-x}$

$|x| > 1$ δεν υπάρχει

Παράδειγμα: χρόνος αναμονής σε μια υπηρεσία

$\frac{1}{12} \leq T \leq 8$

$\mathbb{P}(1 \leq T \leq 2) = \frac{1}{8 - \frac{1}{12}}$

$s \leq T \leq t$

Χρόνος εξυπηρέτησης σε μια υπηρεσία.

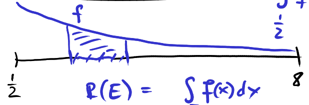
η πιθανότητα του E είναι ανάλογη του μήκους του

$$\mathbb{P}(E) = \frac{t-s}{8-\frac{1}{2}} = \mathbb{P}([t,s])$$

$\underline{\underline{\Omega}} = \left[\frac{1}{12}, 8\right]$

Πιθανότητες αποτελεσμάτων; $\quad p(t) = 0$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{8} f(x)\,dx = 1$$



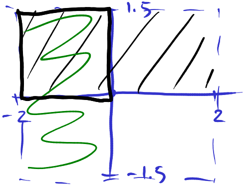
$\mathbb{P}(E) = \int_E f(x)\,dx$

Παραδείγματα ενδεχομένων $\quad \underline{\underline{E}} \subseteq \left[\frac{1}{12}, 8\right]$

Ομοιόμορφη κατανομή σε διάστημα

Παράδειγμα: βελάκι σε στόχο

$\mathbb{P}(E_1) = 1/2 = \mathbb{P}(E_2)$



$E_1 = \{y \geq 0\}$

$E_2 = \{x \leq 0\}$

$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) =$

$= \underbrace{\mathbb{P}(E_1)}_{1/2} + \underbrace{\mathbb{P}(E_2)}_{1/2} - \overbrace{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}^{1/4} = 3/4$

$-2 \leq x \leq 2$

$-1.5 \leq y \leq 1.5$

Πετάμε βελάκι σε στόχο. Πέφτει σε σημείο (x, y).

$\Omega = \{(x,y) : -2 \leq x \leq 2,\ -1.5 \leq y \leq 1.5\} = [-2,2] \times [-1.5, 1.5]$

Πιθανότητες αποτελεσμάτων; $p(x,y) = 0$

Παραδείγματα ενδεχομένων

Ομοιόμορφη κατανομή: $\mathbb{P}(E)$ είναι ανάλογη του εμβαδού του $E \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{Εμβ}(E)}{\text{Εμβ}(\Omega)}, \quad \text{Εμβ}(\Omega) = 4 \cdot 3 = 12$$