

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητήστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Όπως ορίζουμε την $\mathbb{E}[X|Y]$ μπορούμε και να ορίσουμε την $\mathbb{E}[X|Y, Z]$ ή και να δεσμεύσουμε ως προς μεγαλύτερο πλήθος ΤΜ. Το αποτέλεσμα είναι μια συνάρτηση των Y, Z που παριστάνει τη μέση τιμή της X υπό τη δέσμευση ότι γνωρίζουμε τις τιμές των Y, Z . Δώστε τον ακριβή ορισμό της $\mathbb{E}[X|Y, Z]$ για διακριτές μεταβλητές X, Y, Z .

2. Αν $X_n, n = 1, 2, \dots$ είναι μια ακολουθία ΤΜ (που έχουν μέση τιμή) λέμε ότι η ακολουθία αυτή είναι martingale αν ισχύει

$$\mathbb{E}[X_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}] = X_{n-1}, \text{ για } n = 2, 3, \dots$$

Αν Y_1, Y_2, \dots είναι μια ακολουθία ανεξαρτήτων ΤΜ με $\mathbb{E}[Y_j] = 0$ για κάθε j και $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ δείξτε ότι η ακολουθία X_n είναι martingale.

3. Κάποιος μπαίνει σε ένα καζίνο που έχει μέσα τυχερά παιχνίδια. Όλα τα παιχνίδια είναι τίμια, δηλ. αν ο παίχτης βάλει στο παιχνίδι x ευρώ τότε η μέση τιμή των χρημάτων που παίρνει είναι πάλι x ευρώ.

Ας είναι X_0 το ποσό χρημάτων που έχει μαζί του στην αρχή, X_1 το πόσα έχει μετά που παίζει το πρώτο παιχνίδι, X_2 όσα έχει μετά το δεύτερο, κλπ. Δεν κάνουμε καμιά υπόθεση ούτε για το πόσα χρήματα ποντάρει κάθε φορά ούτε για το τι παιχνίδι παίζει. Μπορεί, π.χ., ανάλογα με το πώς πάει το ένα παιχνίδι να αποφασίζει ποιο θα είναι το επόμενο παιχνίδι και πόσα χρήματα να ποντάρει σε αυτό. (Οπότε δεν υπάρχει ανεξαρτησία στην έκβαση ενός παιχνιδιού με τα προηγούμενα.)

Δείξτε ότι η ακολουθία X_n είναι martingale.

4. Σε ένα σακί περιέχονται 2 άσπρες μπάλες και μια μαύρη. Δύο άτομα τραβούν, ο ένας μετά τον άλλο και μόνο μια φορά, μια μπάλα από το σακί, χωρίς επανάθεση. Κερδίζει 1 ευρώ όποιος τραβήξει τη μαύρη μπάλα. Δείξτε ότι δεν έχει σημασία ποιος παίζει πρώτος (το μέσο κέρδος δηλ. των δύο παικτών είναι το ίδιο).

5. Ας είναι X, Y, Z διακριτές ΤΜ που παίρνουν πεπερασμένες στο πλήθος τιμές η κάθε μία (αυτό συνεπάγεται ότι όλες οι παρακάτω μέσες τιμές υπάρχουν). Δείξτε τις παρακάτω γενικεύσεις του νόμου «ολικής μέσης τιμής» $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$.

(1) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|X, Y]]$

(2) $\mathbb{E}[Z|X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|X, Y] | X]$

(3) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|X, Y] | X]]$

6. Η ΤΜ X είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο $\{1, 2, \dots, 100\}$ και η ΤΜ Y είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο $\{1, 2, \dots, X\}$. Ποια η μέση τιμή της Y ;