Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητείστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Αν $X \in \mathbb{N}$ είναι μια ΤΜ που παίρνει φυσικούς αριθμούς ως τιμές (και άρα έχει πάντα μέση τιμή, ενδεχομένως $+\infty$) δείξτε ότι

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[X \geq k\right].$$

2. Σε μια πόλη έγινε ένας φόνος και η αστυνομία έχει καταλήξει ότι ο φονιάς είναι είτε ο Χ είτε ο Υ (και οι δύο είναι φυγάδες από το νόμο) και κατ' αρχήν η αστυνομία θεωρεί ότι είναι εξίσου πιθανοί ως δράστες. Αργότερα ήρθε η πληροφορία από το εργαστήριο ότι ο φονιάς έχει τύπο αίματος Α (10% του πληθυσμού έχει αυτόν τον τύπο αίματος).

Έρευνα στο αρχείο αποκαλύπτει αργότερα ότι ο Χ έχει τύπο αίματος Α (αλλά ουδέν είναι γνωστό για τον τύπο αίματος του Υ). Ποια η πιθανότητα ο Χ να είναι ο φονιάς μετά από τη νέα αυτή πληροφορία;

3. Ένας τουρίστας με πολύ λίγη μνήμη θέλει να επισκεφθεί 4 πόλεις Α, Β, Γ, Δ. Το κάνει ως εξής: κάθε μέρα διαλέγει τυχαία μια από τις πόλεις (διαφορετική από την πόλη όπου βρίσκεται εκείνο το πρωί–θεωρείστε ότι το πρώτο πρωί βρίσκεται σε μια άλλη πόλη Ο) και την επισκέπτεται (δε θυμάται αν την έχει ήδη επισκεφθεί ή όχι). Κατά μέσο όρο πόσες μέρες θα του πάρει μέχρι να επισκεφθεί και τις 4 πόλεις;

4. Σε μια πόλη ενός εκατομμυρίου κατοίκων δύο άγνωστοι συναντιούνται. Ο καθένας έχει 500 γνωστούς στην πόλη (υποθέτουμε οι γνωστοί του καθενός είναι ένα τυχαίο σύνολο). Ποια η πιθανότητα ότι έχουν κοινό γνωστό;

5. Αν X, Y είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφες στο $[0, 1]$ και $Z = XY$, βρείτε τη συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση πυκνότητας της Z.

6. Αν X, Y είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσους μ_X, μ_Y αντίστοιχα και διασπορές σ_X^2, σ_Y^2 δείξτε ότι και η $X + Y$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο $\mu_X + \mu_Y$ και διασπορά $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

7. Μπορεί η X και η Y να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[0, 1]$ και το ζεύγος (X, Y) να **μην** έχει πυκνότητα;

8. Το ζεύγος (X, Y) είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο μοναδιαίο δίσκο $\left\{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$. Αν $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ είναι η απόσταση του τυχαίου σημείου από το $(0, 0)$ βρείτε τη συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση πυκνότητας της R.

9. Το ζεύγος (X, Y) ανήκει πάντα στο μοναδιαίο δίσκο και έχει πυκνότητα η οποία είναι αυστηρά θετική μέσα στο μοναδιαίο δίσκο. Δείξτε ότι οι X και Y δε μπορεί να είναι ανεξάρτητες.

10. Το ζεύγος (X, Y) ανήκει πάντα στο μοναδιαίο δίσκο και έχει πυκνότητα τέτοια ώστε

(1) Η ΤΜ $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 1]$, και

(2) Η πυκνότητα του ζεύγους έχει κυκλική συμμετρία, δηλ. το $f_{(X,Y)}(x, y)$ εξαρτάται μόνο από την απόσταση του (x, y) από το $(0, 0)$.

Βρείτε την πυκνότητα $f_{(X,Y)}(x, y)$ και τις περιθώριες πυκνότητες.