

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητείστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Αποδείξτε τα παρακάτω για δύο οποιεσδήποτε ΤΜ X και Y :

- (1) $\text{Var}[X \pm Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] \pm 2\text{Cov}(X, Y)$
- (2) $\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$
- (3) Αν X_1, \dots, X_n ανεξάρτητες τότε $\text{Cov}(\sum_{j=1}^n a_j X_j, \sum_{j=1}^n b_j X_j) = \sum_{j=1}^n a_j b_j \text{Var}[X_j]$

2. Η ΤΜ X παίρνει μόνο τις τιμές 1 και 2 και η ΤΜ Y παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1. Η κοινή τους πυκνότητα πιθανότητας είναι η εξής:

$$f_{(X,Y)}(1, 0) = 0.1, f_{(X,Y)}(1, 1) = 0.2, f_{(X,Y)}(2, 0) = 0.4, f_{(X,Y)}(2, 1) = 0.3.$$

Βρείτε πρώτα τις περιθώριες πυκνότητες f_X και f_Y , και μετά τις ποσότητες

$$\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \sigma^2(X), \sigma^2(Y), \text{Cov}(X, Y), \rho(X, Y).$$

($\rho(X, Y)$ είναι ο συντελεστής συσχέτισης των X, Y .)

3. Σε ένα δοχείο έχουμε 3 κόκκινους και 2 μαύρους βώλους. Διαλέγουμε τυχαία δύο βώλους χωρίς επανάθεση. Έστω R ο αριθμός των κόκκινων βώλων που επιλέξαμε και B ο αριθμός των μαύρων. Υπολογίστε τις ποσότητες $\mathbb{E}[R], \mathbb{E}[B], \sigma^2(R), \sigma^2(B), \text{Cov}(R, B)$.

4. Έστω π μια τυχαία μετάθεση του συνόλου $S = \{1, 2, \dots, n\}$ (με πιο απλά λόγια, είναι ένας τυχαίος τρόπος να γράψουμε τα στοιχεία αυτά στη σειρά, κι όλοι οι τρόποι είναι εξίσου πιθανοί). Ας είναι X ο αριθμός των σταθερών σημείων της π , δηλ. $X = |\{x \in S : \pi(x) = x\}|$. Βρείτε τη μέση τιμή $\mathbb{E}[X]$ και τη διασπορά $\sigma^2(X)$.

5. Ας είναι A και B δύο τυχαία υποσύνολα του $\{1, 2, \dots, n\}$ μεγέθους k . Βρείτε τη μέση τιμή $\mathbb{E}[|A \cap B|]$.

6. Έχουμε n άτομα των οποίων οι ημέρες γενεθλίων είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες στις 365 μέρες του έτους. Ας είναι X το πλήθος των ζευγών ατόμων που έχουν τα ίδια γενέθλια. Βρείτε τις μέσες τιμές $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X^2]$.