

ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ και MODULES

2023

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
Φυλλάδιο 1ο

Άσκηση 1^η Αν M είναι ένα R -module και $\varphi: M \rightarrow M$ ένας R -ενδομορφισμός

του M , μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $R[X] \times M \rightarrow M$ ως εξής:

$$(X \cdot m = \varphi(m), X^2 \cdot m = \varphi^2(m) = \varphi(\varphi(m)) \dots)$$
$$f(X) \cdot m = f(\varphi)(m)$$

Να αποδείξετε ότι το M γίνεται $R[X]$ -module

Άσκηση 2^η Αν $R = \mathbb{Z}_6$ και $M = \mathbb{Z}_6$ ποια είναι τα στοιχεία ζεύγους (torsion points) του \mathbb{Z}_6 -module \mathbb{Z}_6 ;

Άσκηση 3^η Ορισμός Ένο R -module M λέγεται

R -module εξέλιξη (torsion module)

όταν όλα τα στοιχεία του είναι

στοιχεία εξέλιξης

Να αποδείξετε ότι αν M torsion module

τότε και κάθε υποmodule αυτού είναι

module εξέλιξης καθώς και κάθε

module πηλίκου του M , έστω M/N είναι

επίσης torsion module.

Άσκηση 4^η Ορισμός Ένα R -module M λέγεται

ελεύθερο βασίσεως όταν το μοναδικό
ενήλιο βασίσεως αυτού είναι το
ουδέτερο βασίσεως του M , το 0_M .
Να αποδείξετε ότι το υποmodule
ενός ελεύθερου βασίσεως R -module
είναι και αυτό ελεύθερο βασίσεως

Ισχύει το ίδιο για το module
πηλίκου του M , M/N .

Άσκηση 5^η Να αποδείξετε ότι το βώμα
των ρηζών \mathbb{Q} είναι ελεύθερο
βασίσεως ως \mathbb{Z} -module, αλλά

δεν είναι ελεύθερο \mathbb{Z} -module.

Παράδοση, την
Ο Διδάσκων

Γιάννης Α. Αντωνιάδης