

ΒΙΟ-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Παραδώστε τις ασκήσεις 5.1, 5.2, 5.3

Άσκηση 5.1 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ -5 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιόχωρους του πίνακα. Ποιά είναι η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής; Είναι ο πίνακας διαγωνιοποιήσιμος;

Άσκηση 5.2 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Εξετάστε αν ο πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος και υπολογίστε, εφόσον υπάρχουν, διαγώνιο πίνακα D και αντιστρέψιμο πίνακα P τέτοιους ώστε $A = P^{-1}DP$.

Άσκηση 5.3 Βρείτε κλειστό τύπο για την ακολουθία (a_n) η οποία ορίζεται αναδρομικά

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad \text{για } n \geq 2.$$

Άσκηση 5.4 Έστω $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = x^2 + x + 1$. Δείξτε ότι $A^3 = I$.

Άσκηση 5.5 Βρείτε ένα μη διαγώνιο 3×3 πίνακα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi(x) = x(x+2)(x-7)$.