# Δακτύλιοι και modules (2023)

## ΛΥΣΕΙΣ

## Ασκήσεων 8ου φυλλαδίου

**Άσκηση 1η** Τα $\mathbb{Z}$ και $2\mathbb{Z}$ είναι $\mathbb{Z}$-module

Η απεικόνιση

$$\left.\begin{aligned} \varphi : 2\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ 2m &\mapsto m \end{aligned}\right\}$$

είναι ισομορφισμός των $\mathbb{Z}$-modules

Ως δακτύλιοι δεν είναι ισόμορφοι, αφού ο ένας έχει μοναδιαίο και ο άλλος όχι

**Άσκηση 2η** Στάνταρτ διαδικασία όπως σε όλα τα 1α Θεωρ. Ισομορφίας

**Άσκηση 3η**

$$\boxed{\ker\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = \{0\}} \quad (1)$$

Πράγματι, αν $m \in \ker\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi \Rightarrow$
$m \in \ker\varphi$ και $m \in \mathrm{Im}\varphi \Rightarrow$
$\varphi(m) = 0$ και $\exists\, x \in M$ τ.ω $\varphi(x) = m$

Επομένως, $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(m) = 0$

Αλλά $\varphi^2 = \varphi \Rightarrow \varphi(\varphi(x)) = \varphi(x) = 0$
$\Rightarrow m = \varphi(x) = 0$

Τώρα $\ker\varphi \leq M$ και $\mathrm{Im}\varphi \leq M$
$\Rightarrow \ker\varphi + \mathrm{Im}\varphi \leq M$

# ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ και modules (2023)

## ΛΥΣΕΙΣ ασκήσεων

## ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8°

Έστω $m \in M \Rightarrow \varphi(m) \in \operatorname{Im}\varphi$

Αν $x := m - \varphi(m) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(m) - \varphi(\varphi(m))$

$$= \varphi(m) - \varphi^2(m) = \varphi(m) - \varphi(m) = 0$$

$\Longrightarrow x \in \ker\varphi$.

Δηλαδή $m = x + \varphi(m) \in \ker\varphi + \operatorname{Im}\varphi$

οπότε $\boxed{\ker\varphi + \operatorname{Im}\varphi = M}$ (2)

Από (1) και (2) $\Longrightarrow$ $M = \ker\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi$

Άσκηση 4η Αν $B_1$ βάση του ελεύθερου R-module $M$ και $B_2$ βάση του R-module $N$ τότε το σύνολο $B := (B_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times B_2)$ βάση του $M \times N$ (απόδειξη!)

Άσκηση 5η Το $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ είναι ελεύθερο και μία βάση του είναι το $B = \{1, \sqrt{d}\}$ (απόδειξη!)

Άσκηση 6η Αν υποθ. ότι είναι π.π. $\mathbb{Z}$-module το $\mathbb{Q}$ τότε βρίσκουμε ρητό αριθμό ο οποίος δεν μπορεί να γραφεί ως $\mathbb{Z}$-γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων αυτών. Άτοπο