# ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ και MODULES
2023

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9°

**ΑΣΚΗΣΗ 1η** Ένα R-module M, είναι ελεύθερο τάξης (διάστασης) $n$

$\iff M \cong R^n$

**ΑΣΚΗΣΗ 2η** Ένα R-module M είναι πεπερ παραγόμενο $\iff$ όταν το M είναι ισόμορφο προς κάποιο πηλίκο του R-module $\underbrace{R \oplus R \oplus \dots \oplus R}_{n\text{-φορές}}$, για κάποιο $n$

**ΑΣΚΗΣΗ 3η** Αν N είναι ένα υπο-module του R-module M τ.ω. N και $M/N$

να είναι πεπερ παραγ, τότε και το

M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

**ΑΣΚΗΣΗ 4η** Αν M είναι ένα R-module και

$A \trianglelefteq R$, ορίζουμε το

$A \cdot M := \{ a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_n m_n \mid n \geq 1, a_i \in A, m_i \in M \}$

Να αποδείξετε ότι το

$A \cdot M$ είναι R-module, υπομodule του M.

**ΑΣΚΗΣΗ 5η** Αν $M_1, M_2$ υποmodules του $R$-module $M$, ορίζουμε το

$$(M_1 : M_2) := \{r \in R \mid rM_2 \subseteq M_1\}$$

Να αποδείξετε ότι το $(M_1 : M_2)$ είναι ιδεώδες του $R$.

**Σημείωση** Ιδιαίτερα το

$$(\langle 0 \rangle : M) := \{r \in R \mid rM = 0\}$$

λέγεται μηδενιστής του $R$-module $M$ και συμβολίζεται $Ann(M)$

**ΑΣΚΗΣΗ 6η** Αν $A \trianglelefteq R$ και $M$ $R$-module τ.ω. $A \subseteq Ann(M)$, να αποδείξετε ότι το $M$ μπορεί να θεωρηθεί και ως $R/A$-module.

**ΑΣΚΗΣΗ 7η** Το $R$-module $M$ λέγεται πιστό όταν $Ann(M) = \{0\}$.
Αν $Ann(M) := A$, τότε να αποδείξετε ότι το $M$ είναι πιστό $R/A$-module.

Παράδοση την

Ο Διδάσκων

Ιωάννης Α. Αντωνιάδης